

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

NICHOLAS DICATI PEREIRA DA SILVA

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON COMPLETA E REPETIDA PARA  
ESCOAMENTOS COM FLUIDO COMPRESSÍVEL

Curitiba

2019

NICHOLAS DICATI PEREIRA DA SILVA

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON COMPLETA E REPETIDA PARA  
ESCOAMENTOS COM FLUIDO COMPRESSÍVEL

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi  
Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Bertoldo  
Coorientador: Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki  
Coorientador: Prof. Dr. Rafael B. de R. Borges

Curitiba

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

---

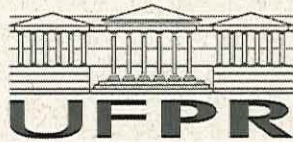
- S586e Silva, Nicholas Dicati Pereira da  
Extrapolação de Richardson completa e repetida para escoamentos com fluido compressível [Recurso eletrônico] / Nicholas Dicati Pereira da Silva – Curitiba, 2019.
- Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, 2019.
- Orientador: Carlos Henrique Marchi  
Coorientadores: Guilherme Bertoldo; Luciano Kiyoshi Araki; Rafael B. de R. Borges
1. Mecânica de Fluidos. 2. Escoamento de fluidos. 3. Extrapolação de Richardson. 4. Erro numérico. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marchi, Carlos Henrique. III. Bertoldo, Guilherme. IV. Araki, Luciano Kiyoshi. V. Borges, Rafael B. de R. VI. Título.

CDD 621.4022

---

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA  
MECÂNICA - 40001016040P5

## TERMO DE APROVAÇÃO

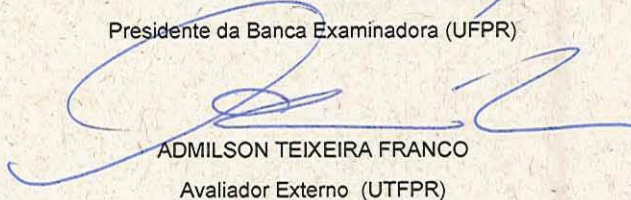
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **NICHOLAS DICATI PEREIRA DA SILVA** intitulada: **EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON COMPLETA E REPETIDA PARA ESCOAMENTOS COM FLUIDO COMPRESSÍVEL**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 13 de Fevereiro de 2019.

  
CARLOS HENRIQUE MARCHI

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

  
ADMILSON TEIXEIRA FRANCO

Avaliador Externo (UTFPR)

  
STEPHAN HENNINGS OCH

Avaliador Externo (UFPR)

  
RICARDO CARVALHO DE ALMEIDA

Avaliador Externo (UFPR)



## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Nelson e Sandra.

À minha esposa Gabriela.

À minha irmã Natasha e ao meu cunhado Renan.

Aos pais da minha esposa Celso e Fatima e à minha cunhada Rafaela.

Aos demais familiares.

Ao meu orientador Prof. Carlos H. Marchi.

Aos meus coorientadores Prof. Guilherme Bertoldo, Prof. Luciano K. Araki e Prof. Rafael B. de R. Borges.

Ao Prof. Chi-Wang Shu.

Aos membros da banca Prof. Admilson T. Franco, Prof. Ricardo C. Almeida e Prof. Stephan H. Och.

Aos amigos e amigas do Lena e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da UFPR.

À CAPES.

A Deus.

## RESUMO

Em mecânica dos fluidos, para estudar escoamentos subsônicos-supersônicos em bocais ou escoamentos supersônicos ao redor de perfis aerodinâmicos, é necessário usar modelos de escoamentos com fluidos compressíveis que, geralmente, são resolvidos por métodos numéricos. Em análise numérica, a extrapolação de Richardson é uma abordagem para a redução de erros numéricos e possui como vantagem o aumento significativo da ordem de acurácia de soluções. Essa abordagem foi usada em vários problemas da dinâmica dos fluidos computacional para reduzir o erro de variáveis secundárias ou do campo de soluções. Porém, principalmente restrita aos escoamentos de fluido incompressível e um tipo de malha com nós coincidentes. O objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento de extrapolação de Richardson completa e repetida (CRRE) para um tipo de malha mais genérica e testá-lo com os métodos de diferenças finitas (FD) e volumes finitos (FV) e com escoamentos de fluidos compressíveis. Nove testes foram realizados nas equações de advecção linear e unidimensionais, quase unidimensionais e bidimensionais de Euler. Sendo que um dos testes possui uma onda de choque normal. O problema da onda de choque normal também foi resolvido com a aproximação essencialmente não oscilatória ponderada (WENO), para comparar com o procedimento da CRRE. O procedimento proposto permite uma redução significativa do erro numérico e aumento significativo da ordem de acurácia em soluções dos métodos FD e FV. CRRE apresentou um desempenho ótimo com a equação de advecção linear, onde o erro foi reduzido por um fator de  $2.82E+24$  e a ordem de acurácia foi aumentada de 1,00 para 10,9 na malha com 40960 nós, e no escoamento de Rayleigh, onde o erro foi reduzido por um fator de  $9.32E+08$  e a ordem de acurácia foi aumentada de 0,998 para 6,62 na malha com 10240 nós. No escoamento isentrópico com FV, o erro foi reduzido por um fator de  $3.35E+10$  e a ordem de acurácia foi aumentada de 1 para 7,57 na malha com 10240 nós, apesar de haver aumento de erro em algumas situações. No escoamento adiabático com onda de choque normal, o procedimento reduziu o erro à montante e à jusante do choque. Porém, a WENO apresentou menor magnitude de erro à montante do choque e uma transição menos suave. Finalmente, no escoamento bidimensional com FD, o erro foi reduzido por um fator de  $3.80E+03$  e a ordem de acurácia foi aumentada de 0,963 para 3,62 na malha com 6553600 nós. Desta forma, conclui-se que o procedimento da CRRE proposto proporciona redução significativa de erros numéricos e aumento significativo da ordem de acurácia de todo o campo de soluções para malhas mais genéricas e escoamentos com fluidos compressíveis.

Palavras-chave: Erro numérico. Extrapolação de Richardson. Escoamento de fluidos compressíveis.

## ABSTRACT

In fluid mechanics, to study subsonic-supersonic flows through a nozzle or supersonic flows around bodies, one needs to use compressible fluid flow models that are usually solved by numerical methods. An approach in numerical analysis to reduce the numerical error is the Richardson Extrapolation and it has the advantage of highly increase the accuracy order of the solutions. This approach was used in a variety of computational fluid dynamics problems to reduce the numerical error of single variables or the entire solution but mainly restricted to incompressible fluid flows and a coincident-nodes grid type. The purpose of this work is to present a Completed Repeated Richardson Extrapolation (CRRE) procedure for a more generic grid and test it with Finite difference (FD) and Finite Volume (FV) methods, and with compressible fluid flows. Nine tests were performed in the linear advection equation and one-, quasi-one-, and two-dimensional Euler equations. One of the tests presents a normal shock wave. The normal shock wave problem was also solved with a Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) scheme to compare it with the CRRE procedure. The proposed procedure can highly reduce the numerical error and increase the accuracy order in FD or FV solutions. CRRE presented an optimal performance in the linear advection equation, where the error was reduced by a factor of  $2.82E+24$  and the accuracy order was increased from 1.00 to 10.9 in the grid with 40960 nodes, and in the Rayleigh flow, where the error was reduced by a factor of  $9.32E+08$  and the accuracy order was increased from 0.998 to 6.62 in the grid with 10240 nodes. In the isentropic flow and FV, the error was reduced by a factor of  $3.35E+10$  and the accuracy order increased from 1 to 7.57 in the grid with 10240 nodes, although the error was increased in some situations. In the adiabatic flow with a normal shock wave, the procedure reduced the error upstream and downstream the shock. However, the WENO scheme had lower magnitude errors upstream the shock and a sharper shock transition. Finally, in the two-dimensional flow and FD, the error was reduced by a factor of  $3.80E+03$  and the accuracy order was increased from 0.963 to 3.62 in the grid with 6553600 nodes. Thus, one can conclude that the proposed CRRE procedure provides a significant numerical error reduction and a significant accuracy order increase of the entire solution field for more generic grids and compressible fluid flows.

Keywords: Numerical error. Richardson extrapolation. Compressible fluid flow.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – RESUMO DE ABORDAGENS UTILIZADAS PARA REPRESENTAR UM FENÔMENO FÍSICO. . . . .	18
FIGURA 2 – EXEMPLO DE BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE. . . . .	20
FIGURA 3 – EXEMPLOS DE ESCOAMENTOS EXTERNOS. . . . .	21
FIGURA 4 – MALHA COM NÓS COINCIDENTES. . . . .	25
FIGURA 5 – MALHA SEM NÓS COINCIDENTES. . . . .	25
FIGURA 6 – VARIAÇÃO PERCENTUAL DA MASSA ESPECÍFICA DE UM ESCOAMENTO EM BOCAL. . . . .	28
FIGURA 7 – EXEMPLO DE UM CHOQUE OBLÍQUO EM FORMATO DE ARCO. . . . .	29
FIGURA 8 – RESUMO DAS CARACTERÍSTICAS DE ONDAS DE CHOQUE E EXPANSÃO. . . . .	29
FIGURA 9 – VOLUME DE CONTROLE GENÉRICO DE UM ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL. . . . .	32
FIGURA 10 – PERFIL DE UM BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE. . . . .	34
FIGURA 11 – POSSÍVEIS SOLUÇÕES DE ESCOAMENTO BLOQUEADO EM UM BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE. . . . .	35
FIGURA 12 – EXEMPLO DA DISPOSIÇÃO DOS NÓS E DOS FLUXOS NUMÉRICOS. . . . .	38
FIGURA 13 – VOLUME DE CONTROLE INFINITESIMAL. . . . .	42
FIGURA 14 – EXEMPLO DE SOLUÇÃO PERIÓDICA. . . . .	46
FIGURA 15 – EXEMPLO DA DISPOSIÇÃO DO NÓ FICTÍCIO. . . . .	47
FIGURA 16 – COMPORTAMENTO ESPERADO PARA O MÓDULO DOS ERROS NUMÉRICOS. . . . .	51
FIGURA 17 – COMPORTAMENTOS ESPERADOS PARA A ORDEM EFETIVA. . . . .	51
FIGURA 18 – MALHA COM NÓS COINCIDENTES, TRÊS NÍVEIS DE MALHA E $r = 2$ . . . . .	53
FIGURA 19 – EXEMPLO DE ESTÊNCIAS PARA $\hat{f}_g$ E $\hat{f}_f$ . . . . .	58
FIGURA 20 – EXEMPLO DE MALHA BIDIMENSIONAL NÃO UNIFORME. . . . .	59
FIGURA 21 – EXEMPLO DE MALHA UNIFORME. . . . .	60
FIGURA 22 – GEOMETRIA DO BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE. . . . .	63
FIGURA 23 – GEOMETRIA E MALHA INICIAL DO PROBLEMA 2D E RESOLVIDO POR FV. . . . .	67
FIGURA 24 – COMPORTAMENTO DA NORMA $L^1$ PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO <i>UPWIND</i> . . . . .	71



FIGURA 25 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA $L^1$ PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO <i>UPWIND</i> . . . . .	71
FIGURA 26 – COMPORTAMENTO DA NORMA $L^1$ PARA A EAL, FD E APRO- XIMAÇÃO WENO-Z. . . . .	72
FIGURA 27 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA $L^1$ PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO WENO-Z. . . . .	73
FIGURA 28 – COMPORTAMENTO DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO DE RAYLEIGH. . . . .	74
FIGURA 29 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO DE RAYLEIGH. . . . .	75
FIGURA 30 – COMPORTAMENTO DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FV. . . . .	76
FIGURA 31 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FV. . . . .	77
FIGURA 32 – RESULTADO DA MASSA ESPECÍFICA PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD NA MALHA DE 10240 NÓS. . . . .	77
FIGURA 33 – COMPORTAMENTO DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD. . . . .	78
FIGURA 34 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD. . . . .	79
FIGURA 35 – ERRO NUMÉRICO EM CADA NÓ DO CAMPO DE SOLUÇÕES PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE. . . . .	80
FIGURA 36 – CAMPO DE SOLUÇÕES PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE. . . . .	81
FIGURA 37 – COMPORTAMENTO DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO 2D EXTERNO E FV. . . . .	83
FIGURA 38 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO 2D EXTERNO E FV. . . . .	83
FIGURA 39 – COMPORTAMENTO DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO 2D SIMPLIFICADO E FD. . . . .	84
FIGURA 40 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA $L^1$ PARA O ESCOAMENTO 2D SIMPLIFICADO E FD. . . . .	85
FIGURA 41 – ERRO NUMÉRICO EM CADA NÓ DO CAMPO DE SOLUÇÕES PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE E APROXIMAÇÃO WENO-Z. . . . .	86

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – PARÂMETROS USADOS PARA ALTERNAR ENTRE AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO. . . . .	36
TABELA 2 – EXTRAPOLAÇÕES DE $u$ . . . . .	57
TABELA 3 – CONDIÇÕES DE ENTRADA E PARÂMETROS DO PROBLEMA 1D. . . . .	61
TABELA 4 – CONDIÇÕES DE ENTRADA E PARÂMETROS DO PROBLEMA Q1D. . . . .	63
TABELA 5 – PARÂMETROS DO PROBLEMA E2D E ESCOAMENTO EXTERNO. . . . .	68
TABELA 6 – PARÂMETROS DO PROBLEMA E2D SIMPLIFICADO. . . . .	69
TABELA 7 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO <i>UPWIND</i> . . . . .	70
TABELA 8 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO WENO-Z. . . . .	72
TABELA 9 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO DE RAYLEIGH. . . . .	74
TABELA 10 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FV. . . . .	76
TABELA 11 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD. . . . .	78
TABELA 12 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE NA REGIÃO SUAVE. . . . .	81
TABELA 13 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE À MONTANTE DO CHOQUE. . . . .	82
TABELA 14 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO 2D EXTERNO E FV. . . . .	82
TABELA 15 – RESULTADOS DA NORMA $L^1$ E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO 2D SIMPLIFICADO E FD. . . . .	84

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1D	– Unidimensional
2D	– Bidimensional
CDS	– Esquema de diferenças centrais
CFD	– <i>Computational Fluid Dynamics</i>
CPU	– Processador do computador
CRE	– Extrapolação de Richardson completa
CRRE	– Extrapolação de Richardson completa e repetida
DDN	– Diferenças divididas de Newton
EAL	– Equação de advecção linear
ENO	– Essentially Non-Oscillatory
ILW	– <i>Inverse</i> Lax-Wendroff
FD	– Diferenças finitas
FV	– Volumes finitos
MSI	– <i>Modified Strongly Implicit</i>
Q1D	– Quase unidimensional
QML	– Quantidade de movimento linear
RAM	– <i>Random-Access Memory</i>
RE	– Extrapolação de Richardson
RK	– Runge-Kutta
RRE	– Multiextrapolação de Richardson
SIMPLEC	– <i>Semi IMPLICIT Linked Equations</i>
TDMA	– <i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i>
TVD	– <i>Total Variation Diminishing</i>
WENO	– <i>Weighted</i> ENO

## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	– Descrição	Unidade
$1,2$	– Pontos distintos de um escoamento	
$a$	– Velocidade do som	$[m/s]$
$A$	– Área do bocal	$[m^2]$
$\mathbf{A}$	– Matriz Jacobiana	
$a_k$	– Coeficientes da regressão polinomial múltipla	
$A_t$	– Área da garganta do bocal	$[m^2]$
$A^*$	– Área crítica do bocal	$[m^2]$
$a^\phi$	– Coeficientes do sistema linear resultante da discretização de $\phi$	
$b_s$	– Início da região não suave	
$b_k$	– Coeficientes das diferenças divididas de Newton	
$b^\phi$	– Termo fonte do sistema linear resultante da discretização de $\phi$	
CFL	– Número de Courant–Friedrichs–Lewy	
$C_i$	– Correção da CRE original	
$c_k$	– Componente $k$ do erro	
$c_p$	– Calor específico a pressão constante	$[J/(kgK)]$
$c_v$	– Calor específico a volume constante	$[J/(kgK)]$
$C^\phi$	– Auxiliar	
$d$	– Coeficiente do método SIMPLEC	$[m/(Ns)]$
$d_0, d_1, d_2$	– Pesos ideais	
$e$	– Energia interna específica	$[J/kg]$
$e_s$	– Fim da região não suave	
$E$	– Energia interna	$[J/m^3]$
$E_h$	– Erro numérico	



$\mathbf{F}$	– Vetor dos fluxos conservados na direção x	
$\hat{\mathbf{F}}$	– Vetor dos fluxos numéricos na direção x	
$\hat{f}$	– Fluxo numérico	
$f^\pm$	– Partição de fluxo à esquerda ou à direita da interface	
$\hat{f}_g, \hat{f}_f$	– Aproximações polinomiais	
$f_0, f_1, f_2$	– Aproximações polinomiais em diferentes substâncias	
$f_n$	– Polinômio da aproximação por diferenças divididas de Newton	
$g$	– Nível de malha	
$G$	– Quantidade disponível de malhas	
$\mathbf{G}$	– Vetor dos fluxos conservados na direção y	
$g'_m$	– Derivadas das condições de contorno em relação ao tempo	
$\mathfrak{h}$	– Entalpia específica	$[J/kg]$
$h$	– Tamanho da partição (nó ou volume)	$[m]$
$\hat{h}$	– Fluxo numérico correspondente às variáveis características	
$H$	– Entalpia total	$[J/kg]$
$\mathbf{H}$	– Fluxo dos fluxos das variáveis características	
$\hat{\mathbf{H}}$	– Vetor dos fluxos numéricos das variáveis conservativas	
$i,j,k$	– Variáveis auxiliares	
$l$	– Fluxo monótono	
$l_i$	– Quantidade de pontos à esquerda de $i$	$[\text{pontos}]$
$l_{i,j}$	– Componente i,j de $\mathbf{L}$	
$\mathbf{L}$	– Autovetores à esquerda	
$L(\cdot)$	– Operador aproximação espacial	
$L_m^1$	– Norma $L^1$ usada para verificar a conservação da massa	$[kg/s/nó]$
$M$	– Número de Mach	
$N$	– Quantidade de nós (ou volumes)	

$\hat{n}$	– Vetor unitário e normal ao contorno	
$N_i$	– Quantidade de nós (ou volumes) da primeira malha	
$N_\xi$	– Quantidade de volumes na direção $\xi$	[volumes]
$N_\eta$	– Quantidade de volumes na direção $\eta$	[volumes]
$p$	– Pressão	[Pa]
$P$	– Indicador de suavidade da CRRE	
$p_W$	– Parâmetro de potência	
$p'$	– Termo de correção da pressão	[Pa]
$p_d$	– Polinômio de grau $d$	
$p_E$	– Ordem efetiva	
$p_v$	– Ordem verdadeira	
$P^\phi$	– Auxiliar	
$q$	– Quantidade de calor adicionado	[J/kg]
$r$	– Razão de refino	
$r_i$	– Quantidade de pontos à direita de $i$	[pontos]
$r_{th}$	– Raio da garganta do bocal convergente-divergente	[m]
$R$	– Constante do gás	[J/(kgK)]
$\mathbf{R}$	– Autovetores à direita	
$R_{L_1}^{p'}$	– Resíduo do sistema linear da coreção de pressão	[Pa]
$t$	– Tempo	[s]
$T$	– Temperatura	[K]
$t_f$	– Tempo final	[s]
$S$	– Estêncil	
$S_r$	– Termo da regressão polinomial múltipla	
$\mathbf{S}$	– Vetor termo fonte	
$u$	– Velocidade nas direções $x$ ou $z$	[m/s]

$\bar{u}$	– Velocidade média	$[m/s]$
$\tilde{u}$	– Função que representa a condição inicial	$[m/s]$
$\mathbf{U}$	– Vetor das variáveis conservativas	
$u_\infty$	– Solução extrapolada	
$u_c$	– Componente de $\mathbf{U}$	
$u_i(t)$	– Aproximação numérica para $u$ no tempo $t$	$[m/s]$
$u_{cm}^{*(k)}$	– Aproximação para a derivada $k$ -ésima da componente $m$ de $\mathbf{U}$	
$U_{ri}$	– Estimativa do erro de Richardson	
$v$	– Velocidade nas direções $y$ ou $\mathbf{r}$	$[m/s]$
$\bar{v}$	– Variável genérica a ser aproximada	
$\mathbf{v}$	– Vetor velocidade	$[m/s]$
$\mathbf{V}$	– Vetor das variáveis características	
$v^\pm$	– Aproximação à esquerda ou à direita da interface	
$v_m^{*(k)}$	– Aproximação para a derivada $k$ -ésima da componente $m$ de $\mathbf{V}$	
$x, y$	– Direções coordenadas cartesianas	$[m]$
$x_{th}$	– Posição da garganta no bocal convergente-divergente	$[m]$
$z, \mathbf{r}$	– Direções coordenadas cilíndricas	$[m]$

### Símbolos gregos

$\alpha$	– Maior autovalor	
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$	– Pesos não lineares não normalizados do WENO-Z	
$\beta_g, \beta_f$	– Indicadores de suavidade	
$\beta_0, \beta_1, \beta_2$	– Indicadores locais de suavidade	
$\gamma$	– Razão entre calores específicos	
$\Gamma, \eta, \xi$	– Direções coordenadas da transformação	
$\delta$	– Espessura da camada limite	$[m]$
$\Delta t$	– Passo de tempo	$[s]$

$\epsilon$	– Parâmetro de sensibilidade	
$\lambda$	– Maior autovalor	
$\boldsymbol{\lambda}$	– Vetor de autovalores	
$\nu$	– Volume específico	$[m^3/kg]$
$\rho$	– massa específica	$[kg/m^3]$
$\tilde{\rho}$	– Função que representa a condição inicial	$[kg/m^3]$
$\varrho, \varphi$	– Variáveis auxiliares	$[m]$
$\Sigma_i, \Sigma_{i+1}$	– Variáveis auxiliares	$[m/s]$
$\tau$	– Compressibilidade	$[Pa^{-1}]$
$\tau_W$	– Indicador de suavidade global	
$\tau_w$	– Tensão de cisalhamento	$[Pa]$
$\phi$	– Variável auxiliar da integração ou propriedade genérica	
$\omega_0, \omega_2, \omega_2$	– Pesos não lineares do WENO-Z	

### Subscritos

$\infty$	– Propriedade na corrente-livre
0	– Propriedade total ou de estagnação
1,2	– Pontos distintos de um escoamento
<i>atm</i>	– Relativo às condições atmosféricas
<i>ex</i>	– Relativo à saída
<i>fic</i>	– Relativo ao nó ou volume fictício
<i>g</i>	– Nível de malha
<i>i</i>	– Nó genérico
$i - 1/2$	– Interface à esquerda de <i>i</i>
$i + 1/2$	– Interface à direita de <i>i</i>
<i>l</i>	– Contorno esquerdo
<i>m</i>	– Componente m de $\boldsymbol{U}$



$nb$	– Volumes vizinhos
$r$	– Contorno direito
$s$	– Processo isentrópico
$Sh1$	– Imediatamente à montante do choque
$Sh2$	– Imediatamente à jusante do choque

### **Sobrescritos**

$*$	– Iteração anterior
$\pm$	– À direita ou à esquerda da interface
$0$	– Passo de tempo anterior
$(1)$	– Primeiro estágio do Runge-Kutta
$(2)$	– Segundo estágio do Runge-Kutta
Analítica	– Solução analítica ou exata
$m$	– Nível de CRE
$n$	– Passo de tempo atual
$n + 1$	– Próximo passo de tempo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.1</b>	<b>Caracterização do estudo . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão bibliográfica . . . . .</b>	<b>20</b>
1.2.1	Extrapolação de Richardson . . . . .	21
1.2.2	Métodos de discretização clássicos e aproximações numéricas . . . . .	24
<b>1.3</b>	<b>Justificativa . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>1.4</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>1.5</b>	<b>Organização do texto . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2</b>	<b>PRINCÍPIOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Escoamentos com fluidos compressíveis . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Ondas de choque e de expansão . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelos matemáticos . . . . .</b>	<b>30</b>
2.3.1	Equação de advecção linear . . . . .	30
2.3.2	Equações de Euler unidimensionais . . . . .	31
2.3.3	Equações de Euler quase unidimensionais . . . . .	33
2.3.4	Equações de Euler bidimensionais . . . . .	36
<b>2.4</b>	<b>Fechamento . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>3.1</b>	<b>Método das diferenças finitas . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>3.2</b>	<b>Método dos volumes finitos . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>3.3</b>	<b>Condições de contorno . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>3.4</b>	<b>Verificação . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>3.5</b>	<b>Extrapolação de Richardson . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>3.6</b>	<b>Polinômios interpoladores e regressão . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>3.7</b>	<b>Fechamento . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>4.1</b>	<b>Extrapolação de Richardson completa e repetida . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>4.2</b>	<b>Equação de advecção linear . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>4.3</b>	<b>Escoamento de Rayleigh . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>4.4</b>	<b>Equações de Euler quase unidimensionais . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>4.5</b>	<b>Equações de Euler bidimensionais . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>4.6</b>	<b>Fechamento . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>5.1</b>	<b>Equação de advecção linear . . . . .</b>	<b>70</b>

5.2	Escoamento de Rayleigh . . . . .	73
5.3	Escoamento isentrópico . . . . .	75
5.4	Escoamento adiabático com choque normal . . . . .	79
5.5	Equações de Euler bidimensionais . . . . .	82
5.6	Consolidação dos resultados . . . . .	85
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	88
6.1	Conclusões . . . . .	88
6.2	Contribuições . . . . .	88
6.3	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	89
	REFERÊNCIAS . . . . .	90

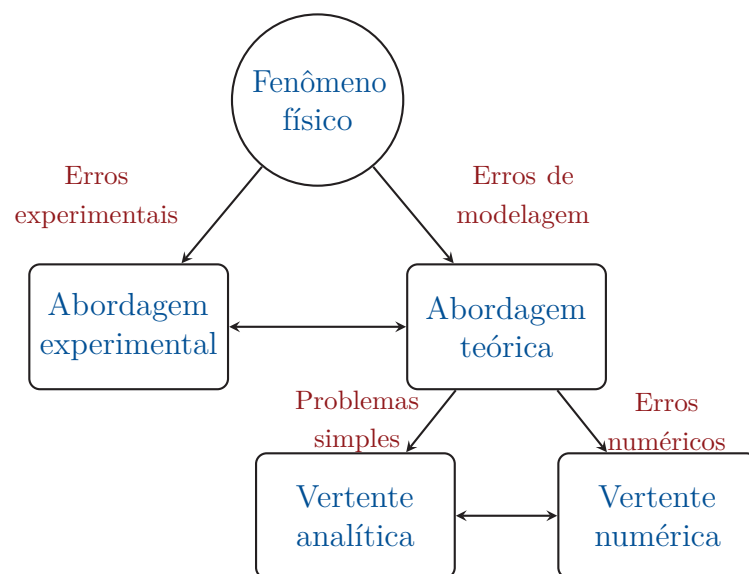
# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Caracterização do estudo

Estudos podem ser conduzidos experimentalmente, teoricamente ou envolvendo os dois tipos de abordagem. No estudo puramente experimental buscam-se dados experimentais, que são obtidos por meio de equipamentos. Quando se tratam de experimentos, por exemplo: estudo de motor-foguete a propulsão líquida por meio de protótipo, é necessária a construção deste último, aquisição e calibração dos equipamentos que farão a leitura e o tratamento dos dados experimentais. Isto demanda grande quantidade de tempo e recursos. Por outro lado, em estudos puramente teóricos, buscam-se resultados para modelos de fenômenos físicos; tais modelos são construídos com base em conceitos físicos e matemáticos. Considerando o mesmo objetivo, estudo de um motor-foguete a propulsão líquida, não são necessários o protótipo nem equipamentos de aquisição de dados experimentais. Porém, o estudo está limitado ao modelo físico-matemático utilizado. Outra possibilidade é conduzir um estudo misto, envolvendo dados experimentais e resultados dos modelos físicos e matemáticos (1, 2, 3).

Existem duas vertentes do estudo teórico: a analítica e a numérica. A primeira trata de e matemáticos menos complexos, que possuem solução analítica ou fechada. A segunda, mais recente, possibilita a solução de modelos mais complexos. Porém, possui a desvantagem de apresentar erros numéricos. De fato, todas as abordagens citadas possuem erros. Erros experimentais para estudos experimentais e erros de modelagem para estudos teóricos. A FIGURA 1 resume estas características (1).

FIGURA 1 – RESUMO DE ABORDAGENS UTILIZADAS PARA REPRESENTAR UM FENÔMENO FÍSICO.



FONTE: O autor (2019).



Segundo Ferziger e Perić (4), a obtenção de uma solução numérica pode ser resumida nas seguintes etapas: seleção dos modelos matemáticos, escolha do método de discretização, definição do sistema de coordenadas e tipo de malha, seleção das aproximações numéricas, seleção do método de solução e escolha do critério de convergência. A etapa de seleção dos modelos matemáticos está limitada ao tipo de problema a ser estudado. Existem vários métodos de discretização disponíveis na literatura. Como o intuito deste trabalho não é discutir tais métodos, destacam-se os seguintes: elementos finitos, diferenças finitas (FD, do inglês *Finite Difference*) e volumes finitos (FV, do inglês *Finite Volume*); sendo que estes dois últimos métodos serão utilizados neste trabalho. Independente do método de discretização escolhido, os estudos numéricos são caracterizados por proporcionarem soluções aproximadas para modelos matemáticos, ou seja, possuem erros numéricos. Segundo Marchi (1), os erros numéricos são devidos principalmente aos erros de truncamento, arredondamento e iteração; de fato, os erros de iteração só ocorrem quando são usados procedimentos iterativos. Outra fonte de erro é devida aos erros de programação e usuário, por exemplo. Os erros de truncamento das várias aproximações usadas geram os erros discretização das variáveis de interesse (1).

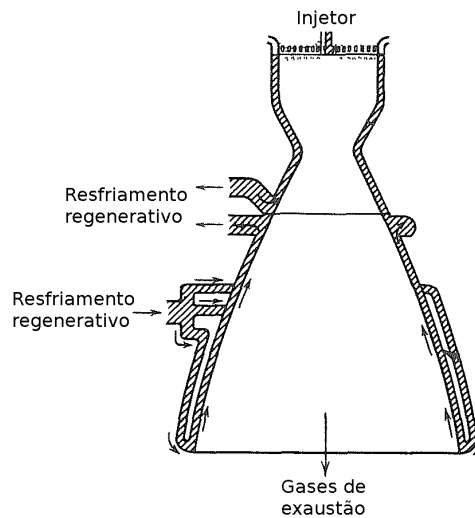
A verificação é uma prática necessária ao realizar estudos numéricos e tem como finalidade garantir a confiabilidade dos resultados numéricos e, inclusive, do código ou programa computacional (1, 5). Conforme apresentado por Marchi (1), é possível utilizar análise de erros e ordens a priori e a posteriori para mostrar que um código e suas soluções estão desempenhando suas funções de maneira correta. O resultado quantitativo da verificação é o erro numérico ou estimativa numérica, quando não se dispõe de solução analítica. O erro numérico é a simples diferença entre a solução analítica e a solução numérica, enquanto que a estimativa pode ser obtida de diferentes formas como por exemplo: estimador de Richardson, Delta e Multicoeficiente (1). Com o código e suas soluções verificados, é possível reduzir os erros de discretização através de três maneiras diferentes: aumentar a quantidade de pontos da solução numérica, usar aproximações (ou esquemas) numéricas de ordens mais elevadas ou utilizar extrapolação de Richardson (RE, do inglês Richardson *Extrapolation*) (6). De fato, é possível utilizar estas extrapolações de forma recursiva e reduzir ainda mais o erro de discretização; tal procedimento é conhecido como multiextrapolação de Richardson (RRE, do inglês *Repeated Richardson Extrapolation*) (7, 8, 9).

Neste trabalho, serão considerados modelos matemáticos que representem o fenômeno físico do escoamento interno em bocais do tipo convergente-divergente de motores-foguete e escoamentos externos de veículos aeroespaciais e os métodos numéricos usados para resolver tais modelos. Nos escoamentos de interesse, os fluidos devem ser modelados como compressíveis e podem ser modelados como invíscidos (10).

A título de exemplo, na FIGURA 2 observa-se um bocal convergente-divergente,

utilizado em motores-foguete à propulsão líquida. Estão destacados o injetor, a entrada e saída do fluido de resfriamento regenerativo e a saída dos gases de exaustão. O combustível e o oxidante são injetados pelo injetor e sua queima ocorre imediatamente na sequência, os gases da combustão escoam pela câmara de combustão, entram no convergente do bocal, onde sua velocidade aumenta, passam pela garganta do bocal e vão para o divergente. Neste último, a velocidade dos gases é aumentada ainda mais, antes de saírem do bocal. Antes de ser injetado, o combustível é direcionado para os canais de resfriamento regenerativo onde absorve o calor das paredes do bocal (11).

FIGURA 2 – EXEMPLO DE BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE.



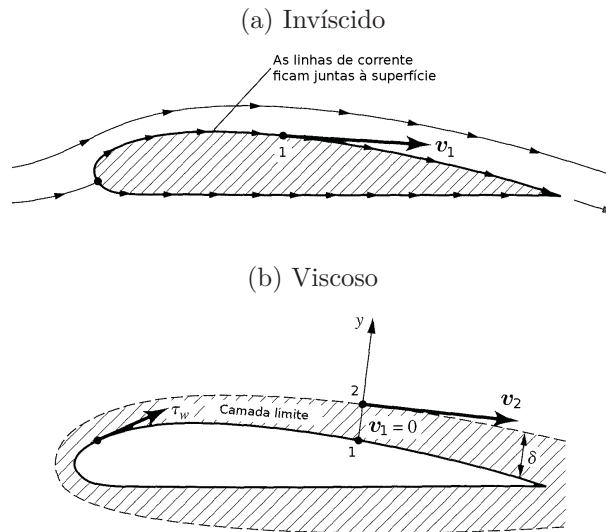
FONTE: Modificado de Sutton e Biblarz (11).

Na FIGURA 3 observam-se escoamentos externos invíscido e viscoso ao redor de um perfil, onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade do escoamento, 1 e 2 são pontos do escoamento,  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento e  $\delta$  é a espessura da camada limite. Na FIGURA 3a, as linhas de corrente ficam próximas à superfície, onde ocorre o deslizamento. Na FIGURA 3b, apesar de exagerada, a espessura da camada limite fornece uma ideia desta região do escoamento. No ponto 1 da FIGURA 3b, a velocidade tangencial à superfície do perfil é zero, devido à condição de não deslizamento (12).

## 1.2 Revisão bibliográfica

A RE pode ser utilizada em diferentes áreas de estudo para diversas finalidades, conforme será apresentado na sequência. Para fornecer uma visão abrangente sobre a RE, serão apresentados alguns trabalhos para destacar suas aplicações e um levantamento sobre o estado da arte da mesma. Também, serão destacados conceitos sobre os métodos de discretização por FV e FD e outros métodos, que são usados em conjunto com FV e FD na solução de escoamentos em CFD.

FIGURA 3 – EXEMPLOS DE ESCOAMENTOS EXTERNOS.



FONTE: Modificado de Anderson e Hughes (12).

### 1.2.1 Extrapolação de Richardson

Uma afirmação feita por Richardson (13) continua válida até hoje: existe uma demanda por métodos rápidos, fáceis de entender e aplicáveis a equações não usuais. Nesse mesmo trabalho, o autor apresentou um método para redução de erros, inicialmente chamado de *h<sup>2</sup>-extrapolation*, onde foi possível reduzir o erro da solução numérica usando malhas distintas (14). Apesar de não resolver as equações do modelo matemático, o método apresentado tornou-se rápido, fácil de entender e é aplicado em equações não usuais, como Navier–Stokes parabolizado (15). Além das RE serem usadas, principalmente, em CFD, existem estudos em diferentes áreas, como economia (16), processamento de sinais (17) e estatística (18).

A partir do trabalho de Richardson foram derivados quatro tipos principais de aplicação para as RE: controle do passo de tempo (19), acelerador de convergência (20), estimativa de erro (21) e redução de erros numéricos. Sendo que esse último será abordado nesse texto. Com base nas aplicações das RE para redução de erros numéricos, encontradas na literatura, destacam-se sete trabalhos: aplicação da RE em escoamentos viscosos ao redor de aerofólios, avaliação da RE em dois escoamentos bidimensionais, obtenção de uma solução com sexta ordem de acurácia, análise da RE com um gradiente descontínuo de temperatura, análise de dez diferentes esquemas numéricos com a RE, obtenção de soluções altamente acuradas para a equação bidimensional de Laplace e obtenção de solução acurada para o problema da cavidade, discutidos a seguir.

Zingg (22) apresentou uma investigação da RE em escoamentos viscosos subsônicos e transônicos ao redor de aerofólios, modelados pelas equações de Navier–Stokes com modelo de turbulência Baldwin–Lomax e resolvidos por meio de FD. Nestes escoamentos,

destaca-se a separação de escoamento por choques, pois um fenômeno como o choque impõe certas dificuldades na solução numérica. Apesar disso, o autor afirmou que a RE pode reduzir os requisitos de malha para certo nível de acurácia, em particular, para o cálculo do arrasto.

Shyy et al. (23) avaliaram a RE para melhorar a acurácia de soluções de dois problemas bidimensionais: escoamento laminar em cavidade e Reynolds-*averaged backward-facing*. A solução foi obtida por meio de FD em malhas uniformes. Ao fim do estudo, os autores afirmaram que a RE não exibiu comportamento consistente da ordem de acurácia para o escoamento laminar, que o desempenho da RE não foi satisfatório e que a RE não funciona adequadamente em abordagens típicas de CFD.

Wang e Zhang (24) obtiveram sexta ordem de acurácia em todo o campo de solução para a equação bidimensional de Poisson. Para obter a solução, os autores utilizaram FD, um esquema compacto de quarta ordem, Multigrid e RE. O procedimento desse último foi o cálculo de uma solução com sexta ordem de acurácia na malha grossa, atribuição dessa diretamente nos nós coincidentes da malha fina e uma interpolação, com base em um operador, para calcular a solução com sexta ordem de acurácia nos demais pontos da malha fina. Apesar de não apresentarem muitas informações sobre o operador, eles conseguiram obter aumento na ordem de acurácia.

Nicolas et al. (25) analisaram as consequências de um gradiente de temperatura descontínuo com a RE. Nesta análise, os autores utilizaram os métodos dos elementos finitos, FD e FV. Além disso, eles propuseram uma correção na obtenção da RE, por série de Taylor, para tratar a descontinuidade. Ao fim do estudo, os autores afirmaram que a RE pode aumentar a acurácia de soluções discretas, preferencialmente, quando são usadas aproximações numéricas com baixa ordem de acurácia no espaço e em apenas algumas regiões do estudo.

Marchi e Germer (26) avaliaram o desempenho da RRE na redução de erros de discretização para dez aproximações numéricas diferentes. O problema numérico resolvido foi a equação de advecção-difusão unidimensional com aproximações numéricas de ordem um a três. Os autores concluíram que a RRE é extremamente eficiente na redução dos erros de discretização de variáveis primárias e secundárias; podendo atingir uma ordem de acurácia de até 18,9. Dentre as aproximações estudadas, o esquema de diferenças centrais (CDS, do inglês *Central Differencing Scheme*), de segunda ordem de acurácia, apresentou o melhor desempenho com a RRE.

Marchi et al. (27) utilizaram a RRE para reduzir e estimar os erros de discretização de soluções numéricas em problemas de condução de calor. No estudo, a equação bidimensional de Laplace foi resolvida por meio de FD, malhas uniformes, aproximações numéricas de segunda ordem e Multigrid. Ao fim do estudo, os autores demonstraram que



RRE reduz significativamente o erro de discretização, que a ordem de acurácia alcançada foi de 19,1 e, ainda, que para obter um dado valor de erro são necessários muito menos tempo de processamento e RAM para a RRE do que sem sua aplicação.

AbdelMigid et al. (28) apresentaram uma extensa revisão da literatura sobre o problema da cavidade e investigaram a solução das equações de Navier-Stokes com fluidos incompressíveis para a faixa de Reynolds de 100 a 5000. Neste estudo, FV foi utilizado em conjunto com computação paralela para obter as soluções numéricas em malhas uniformes e a RRE foi usada para a redução dos erros de discretização. Os autores conseguiram um aumento de ordem de acurácia de dois para seis com a RRE.

A partir desses sete trabalhos é possível delimitar as aplicações de RE na redução do erro numérico, ou de forma equivalente, no aumento da ordem de acurácia. Observa-se que as RE são aplicadas em problemas simples ou complexos, com ou sem fenômenos sofisticados, como por exemplo a descontinuidade. Estes problemas podem ser resolvidos por qualquer um dos métodos numéricos clássicos (elementos finitos, FD ou FV) em conjunto com modelos de turbulência, Multigrid ou diferentes tipos de aproximações numéricas. Podem ocorrer situações onde a RE não funciona. Porém, na maioria dos casos, a RE promove melhorias na qualidade da solução numérica. As situações onde a RE não funciona ou não é eficiente devem ser estudadas, pelo menos, a fim de se encontrar a causa deste comportamento.

Em relação às as RE para redução de erro, foram propostas modificações em sua metodologia para alcançar maior redução de erros numéricos e reduzir os erros onde as RE não funcionavam ou simplesmente não eram utilizadas. Dentre as alterações no estado da arte do método, destacam-se: a forma recursiva da aplicação da RE, conhecida como RRE, que possibilita uma maior redução do erro (14); um algoritmo para a generalização do procedimento da RE, que requer um número pequeno de cálculos e pouco armazenamento (29); um método para calcular a RE em todo o campo de soluções para um tipo de malha específico, conhecido como extrapolação de Richardson completa (CRE, do inglês *Completed Richardson Extrapolation*) (30); um método CRE para problemas transientes (31); uma teoria completa de convergência e estabilidade para o processo generalizado da RE (32); o conceito de série de Richardson, útil para o entendimento do comportamento da RE (33); análise de algumas limitações da RE e possíveis soluções (34); uma abordagem local para a RE no método dos elementos finitos (35); o uso de uma expansão por série de Taylor modificada em conjunto com a RE para tratar uma descontinuidade (25); uso de interpolação polinomial com a RRE para melhorar o seu desempenho em cinco tipos de variáveis diferentes (36); e uma extensão da CRE para ser usado recursivamente e um novo método, chamado de *Full Richardson Extrapolation*, para redução de erros em campos de soluções (37).

### 1.2.2 Métodos de discretização clássicos e aproximações numéricas

Considerando os métodos de discretização clássicos, existem várias formas de se aplicar o FD e o FV. Segundo Lomax, Pulliam e Zingg (38) e Ferziger e Perić (4), as aproximações, para os termos das equações diferenciais que se deseja resolver em FD, dependem diretamente dos valores das propriedades nos nós.

Para o FV, Lomax, Pulliam e Zingg (38) e Ferziger e Perić (4) afirmam que este método parte da forma integral das equações de conservação. Por outro lado, Shu (39) e Versteeg e Malalasekera (40) utilizam a forma diferencial das equações de conservações integradas. Além disso, as formas apresentadas por Shu (39) e Lomax, Pulliam e Zingg (38) resultam em uma média da propriedade no volume de controle. Isto não é observado nas formas apresentadas por Ferziger e Perić (4) e Versteeg e Malalasekera (40).

Outros métodos podem ser usados em conjunto com os métodos de discretização e, também, podem ser diferentes entre si. Por exemplo, Versteeg e Malalasekera (40) consideram o uso do método SIMPLEC (do inglês, *Semi IMPLICIT Linked Equations Consistent*) para o tratamento do acoplamento entre as equações de conservação e Shu (39) usa o conceito de decomposição em variáveis características.

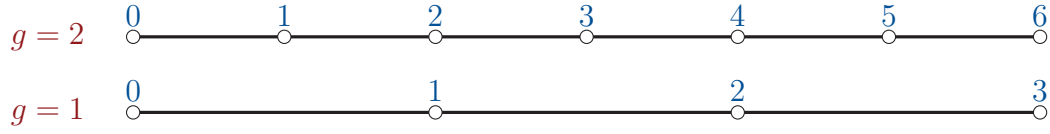
Além disso, existem vários tipos de aproximações numéricas (ou esquemas numéricos), que, por exemplo, podem ser obtidos para uma ou mais equações diferenciais. Porém, algumas dessas aproximações numéricas podem causar instabilidades, quando usadas em equações diferenciais específicas. Para corrigir estas instabilidades, surgiram conceitos como monotonicidade e alta resolução de esquemas numéricos (41). Dentre estes esquemas numéricos, pode-se citar a aproximação variação total decrescente (TVD, do inglês *Total Variation Diminishing*), a aproximação essencialmente não oscilatória (ENO, do inglês *Essentially Non-Oscillatory*) e a aproximação ENO ponderada (WENO, do inglês *Weighted ENO*) (41, 39).

## 1.3 Justificativa

Geralmente, as modificações e estudos envolvendo a RE foram feitos para o FD e uma malha que possui nós coincidentes, mostrada na FIGURA 4, onde  $g$  é o nível de malha e a razão de refino ( $r$ ) entre as malhas é 2. Pode-se observar que a malha grossa ( $g = 1$ ) possui nós coincidentes na malha fina ( $g = 2$ ). Uma malha com nós não coincidentes, que geralmente é usada com FV, é apresentada na FIGURA 5, onde observa-se que não existem nós (ou volumes) coincidentes para  $r = 2$ .

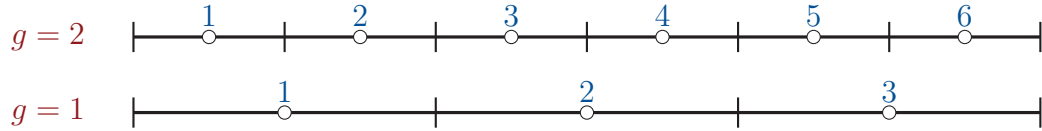
Considerando que as RE e CRE com e sem repetição já foram usadas em conjunto com escoamentos de fluidos incompressíveis e com a malha com nós coincidentes (veja por exemplo, (37), (36) e (27)), é interessante que a CRE possa ser generalizada para um tipo de malha onde não existam nós (ou volumes) coincidentes e usada recursivamente

FIGURA 4 – MALHA COM NÓS COINCIDENTES.



FONTE: O autor (2019).

FIGURA 5 – MALHA SEM NÓS COINCIDENTES.



FONTE: O autor (2019).

em escoamentos com fluidos compressíveis, que são um caso mais geral de escoamentos. Além disso, também é interessante avaliar esta generalização com diferentes métodos numéricos. Deste modo, define-se o problema a ser estudado neste texto: problemas de escoamento interno em bocais de motores-foguete, o escoamento externo em perfis aerodinâmicos e os métodos numéricos para resolvê-los. Pretende-se generalizar a CRE para reduzir os erros numéricos em todo o campo de soluções de escoamentos com fluidos compressíveis, modelados pelas equações de Euler unidimensionais, quase unidimensionais e bidimensionais em malhas genéricas (sem nós coincidentes). Serão usadas geometrias simples ou idealizadas com condições de contorno de Dirichlet, Neumann ou por meio de uma técnica conhecida como Lax-Wendroff inverso (ILW, do inglês *Inverse* Lax-Wendroff).

## 1.4 Objetivos

O objetivo deste estudo é propor e testar um procedimento de CRRE para malhas sem nós (ou volumes) coincidentes e que possibilite a redução de erros numéricos em escoamentos com fluidos compressíveis. Este objetivo geral pode ser dividido nos seguintes objetivos específicos:

- resolver numericamente a equação de advecção linear, que modela um escoamento simplificado;
- resolver numericamente o escoamento de Rayleigh e as equações de Euler quase unidimensionais e bidimensionais;
- utilizar os métodos de discretização por diferenças finitas explícito e volumes finitos explícito e implícito;
- avaliar a ordem do erro da CRE com repetição; e
- verificar as soluções numéricas com e sem a CRRE.

Para atingir estes objetivos, serão realizados testes numéricos nas equações linear (EAL) de advecção e unidimensionais (1D), quase unidimensionais (Q1D) e bidimensionais (2D) de Euler. Para resolver essas equações, serão utilizados os métodos de FD e FV, sendo esse último nas formulações implícita e explícita. Um fenômeno importante que geralmente ocorre em escoamentos com fluidos compressíveis é a onda de choque. Nesse trabalho, CRRE também será avaliado em soluções que envolvem este fenômeno e, para comparar com métodos de alta ordem já existentes na literatura, o escoamento com choque também será resolvido com a aproximação WENO.

## 1.5 Organização do texto

Este texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, são apresentadas uma caracterização do estudo, onde se comenta como o estudo será conduzido e quais problemas de engenharia se tem interesse, a revisão bibliográfica, onde se discorre sobre as aplicações e estado da arte da RE e se comenta brevemente sobre os métodos de discretização clássicos, a justificativa do problema que se deseja resolver, e, por fim, os objetivos desse texto; no Capítulo 2, são apresentados conceitos físicos e matemáticos dos escoamentos que se deseja resolver; no Capítulo 3, os métodos numéricos utilizados para os escoamentos citados; no Capítulo 4, a metodologia utilizada para resolver os escoamentos e aplicar a CRRE; no Capítulo 5, são apresentados os resultados e discussão dos estudos desenvolvidos nesse texto e; no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e contribuições do presente estudo e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 PRINCÍPIOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS

Neste capítulo serão apresentados os princípios físicos e matemáticos necessários para o entendimento dos fenômenos presentes nos escoamentos e dos modelos matemáticos usados para resolver os escoamentos.

### 2.1 Escoamentos com fluidos compressíveis

Uma das formas de classificar um escoamento é por meio do fluido, por exemplo: incompressível e compressível (10). Em algumas aplicações, como o escoamento de líquidos em bombas e turbinas hidráulicas e, até mesmo, o escoamento de ar em ventiladores centrífugos, o fluido pode ser modelado como incompressível e em outras, como os escoamentos internos em bocais ou externos em perfis aerodinâmicos, é necessário modelar o fluido como compressível; dependendo do número de Mach (10). A compressibilidade ( $\tau$ ) pode ser entendida como a variação no volume específico ( $\nu$ ) (ou na massa específica  $\rho$ ) em resposta a uma variação na pressão ( $p$ ) ou vice versa. As equações (2.1) e (2.2) apresentam estes conceitos (10).

$$\tau = -\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dp} \quad (2.1)$$

$$\tau = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (2.2)$$

Reescrevendo a equação (2.2), resulta

$$d\rho = \tau \rho dp, \quad (2.3)$$

ou seja, considerar um fluido incompressível ( $\tau = 0$ ) é equivalente a considerar a massa específica como sendo constante. A título de exemplo, a variação da massa específica em relação ao valor do primeiro ponto de um escoamento e o número de Mach, em um bocal convergente-divergente, são apresentados na FIGURA 6.

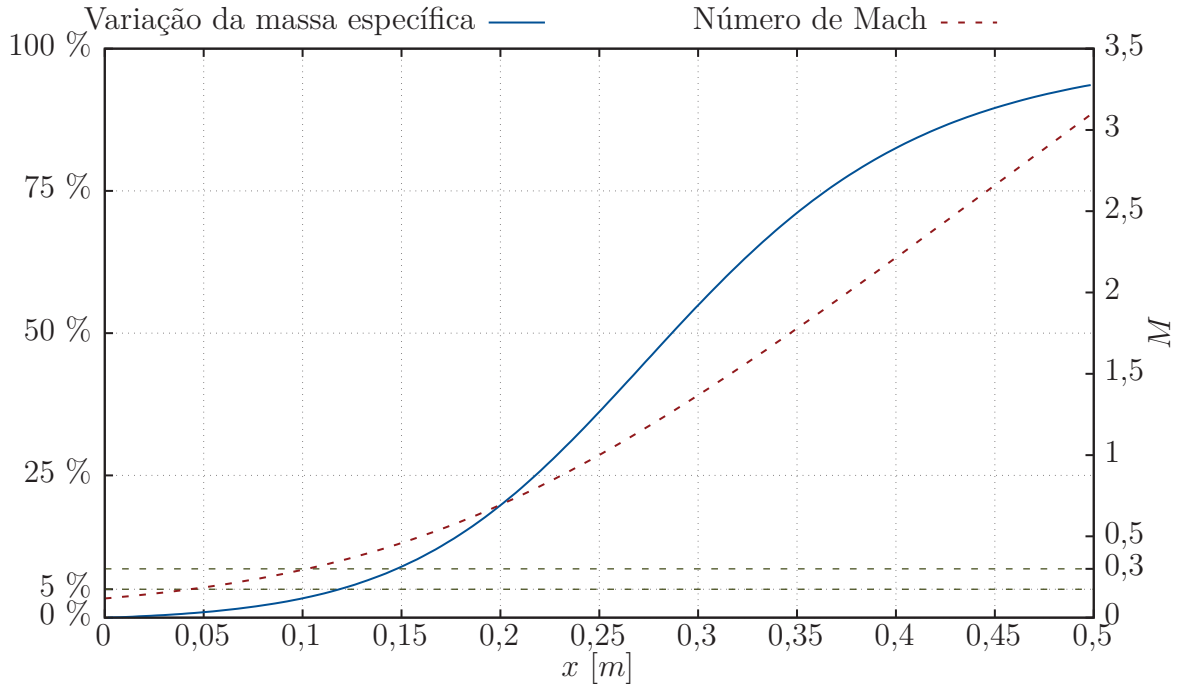
Admite-se escoamento com fluido incompressível quando a variação da massa específica não ultrapassa 5 % (10). No caso apresentado, seria cometido um erro de quase 100 % se a hipótese de fluido incompressível tivesse sido adotada.

No escoamento, as ondas sonoras são produzidas por distúrbios. Essas, por sua vez, se propagam na velocidade do som através do fluido e para todo o escoamento. A velocidade do som ( $a$ ) pode ser definida de maneira genérica da seguinte forma (42)

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (2.4)$$

onde o subscrito  $s$  representa um processo isentrópico.

FIGURA 6 – VARIAÇÃO PERCENTUAL DA MASSA ESPECÍFICA DE UM ESCOAMENTO EM BOCAL.



FONTE: O autor (2019).

Para um gás perfeito, a velocidade do som pode ser escrita da seguinte forma (42)

$$a = \sqrt{\gamma RT}, \quad (2.5)$$

onde  $\gamma = c_p/c_v$  representa a razão entre calores específicos,  $R$  a constante do gás,  $T$  a temperatura e  $c_p$  e  $c_v$  os calores específicos a pressão e volume constante.

Com a velocidade do som definida, é possível relacionar os efeitos de inércia com os efeitos de compressibilidade por meio de um importante parâmetro adimensional, conhecido como número de Mach ( $M$ ) (10)

$$M = \frac{|\mathbf{v}|}{a}, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{v}$  representa o vetor velocidade.

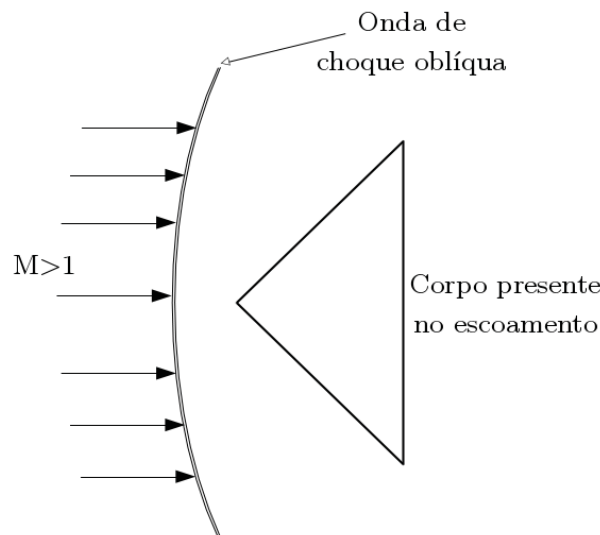
Com base no número de Mach, Anderson (10) apresenta quatro faixas de escoamento: subsônico ( $M < 0,8$ ), transônico ( $0,8 \leq M \leq 1,2$ ), supersônico ( $1,2 < M \leq 5$ ) e hipersônico ( $M > 5$ ). Além disso, Anderson (10) separa escoamento com fluido incompressível de compressível por meio do número de Mach. Para escoamentos com números de Mach inferiores a 0,3 considera-se fluido incompressível (10), que é um pouco mais rigoroso do que a classificação que tem como base a variação da massa específica no exemplo da FIGURA 6.

## 2.2 Ondas de choque e de expansão

As ondas sonoras são responsáveis por propagarem os efeitos de variação de propriedades e direção causadas por um distúrbio no escoamento. As ondas sonoras provocam mudanças infinitesimais no escoamento, enquanto que as de expansão e de choque provocam mudanças mais significativas (10, 42).

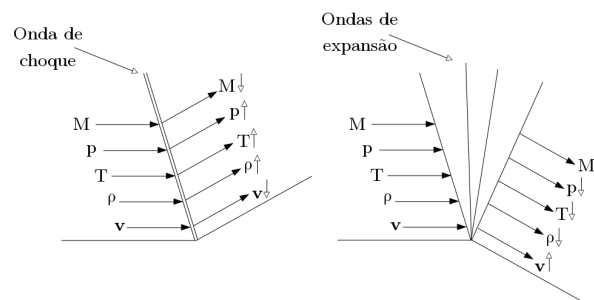
A onda de choque oblíqua possui um caso especial para escoamentos unidimensionais conhecida como onda de choque normal. As mudanças, quando um escoamento atravessa essa última, são mais severas do que aquelas resultantes de uma onda de choque oblíqua. O caso mais próximo de uma onda de choque normal em um escoamento bidimensional é uma onda de choque oblíqua em forma de arco, conforme a FIGURA 7 (10). Independentemente da dimensão onde a onda de choque ocorra, as mudanças nas propriedades serão qualitativamente as mesmas, a velocidade será reduzida enquanto temperatura, pressão e massa específica serão aumentadas de forma não isentrópica (10).

FIGURA 7 – EXEMPLO DE UM CHOQUE OBLÍQUO EM FORMATO DE ARCO.



FONTE: Modificado de Anderson (10).

FIGURA 8 – RESUMO DAS CARACTERÍSTICAS DE ONDAS DE CHOQUE E EXPANSÃO.



FONTE: Modificado de Anderson (10).

As ondas de expansão são, basicamente, o oposto das ondas de choque; a velocidade



será aumentada enquanto que temperatura, pressão e massa específica serão reduzidas de forma isentrópica (10). A FIGURA 8 resume as características apresentadas para as ondas de expansão e de choque.

## 2.3 Modelos matemáticos

Considere um sistema homogêneo de equações diferenciais parciais de primeira ordem em  $x$  e  $t$

$$\mathbf{U}_t(x,t) + \mathbf{A}\mathbf{U}_x(x,t) = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um vetor com  $m$  componentes, que podem representar as propriedades de um escoamento (por exemplo, massa específica e velocidade),  $\mathbf{A}$  é uma matriz real  $m \times m$  constante e os subscritos  $x$  e  $t$  denotam derivadas parciais em relação a  $x$  e  $t$ . Para que esta equação seja hiperbólica, a matriz  $A$  deve possuir autovalores reais e um conjunto de  $m$  autovetores linearmente independentes (43). A partir dessa afirmação, pode-se concluir que qualquer vetor em  $\mathbb{R}^m$  pode ser decomposto como uma combinação linear desses autovetores, ou seja, é possível decompor um sistema de  $m$  equações em  $m$  equações distintas (43).

### 2.3.1 Equação de advecção linear

Uma das mais simples equações hiperbólicas é a equação de advecção linear e possui a forma

$$u_t + \bar{u}u_x = 0, \quad (2.8)$$

onde  $u$  é a velocidade na direção  $x$  e  $\bar{u}$  é a velocidade média. Nessa, a velocidade média é constante e tem-se uma equação diferencial parcial, escalar, linear e hiperbólica com coeficiente constante (43).

Segundo Leveque (43), a solução analítica para a equação de advecção linear (equação (2.8)) pode ser facilmente determinada por qualquer função suave da seguinte forma

$$u^{\text{Analítica}}(x,t) = \tilde{u}(x - \bar{u}t), \quad (2.9)$$

onde  $u^{\text{Analítica}}$  é a solução analítica e  $\tilde{u}$  pode ser entendido como uma função que representa a condição inicial.

As características e propriedades das equações não lineares e sistemas de equações não lineares não serão diretamente apresentadas neste texto. Para mais detalhes sugere-se o texto de Leveque (43). O próximo modelo a ser analisado são as equações de Euler, que formam um sistema de equações hiperbólicas não lineares.

### 2.3.2 Equações de Euler unidimensionais

A formulação conservativa das equações de Euler unidimensionais na forma diferencial pode ser escrita como (44, 43)

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{U}$  também é chamado de vetor das variáveis conservativas,  $\mathbf{F}$  é o vetor dos fluxos conservados e  $\mathbf{S}$  é o vetor termo fonte, que depende do problema a ser resolvido. Os vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$  são escritos como (44, 43)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde  $E$  é a energia interna por unidade de volume e é apresentada na equação (2.12).

$$E = \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right), \quad (2.12)$$

onde  $e$  é a energia interna específica e pode ser obtida da seguinte forma (44)

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}. \quad (2.13)$$

A velocidade do som e a pressão também podem ser obtidas pelas equações (2.14) e (2.15) (44).

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (2.14)$$

$$p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{\rho u^2}{2} \right) \quad (2.15)$$

Escrevendo as equações de Euler (equação (2.11)) na forma da equação (2.7), resulta a matriz Jacobiana (44)

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 2)u^3 - \frac{a^2 u}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

que possui autovalores e autovetores à esquerda e à direita, apresentados, respectivamente, nas equações (2.17), (2.18) e (2.19) (44, 45).

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} u - a \\ u \\ u + a \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u/(2a) + u^2/(4H - 2u^2) & -u/(2H - u^2) - 1/(2a) & 1/(2H - u^2) \\ 2 - 2H/(2H - u^2) & 2u/(2H - u^2) & -2/(2H - u^2) \\ u^2/(4H - 2u^2) - u/(2a) & 1/(2a) - u/(2H - u^2) & 1/(2H - u^2) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - a & u & u + a \\ H - ua & u^2/2 & H + ua \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

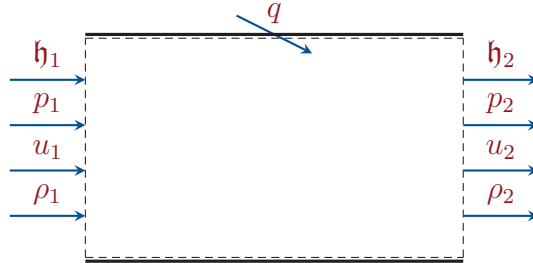
Nessas últimas equações,  $H$  é a entalpia total e pode ser obtida pela seguinte relação (44)

$$H = \frac{E + p}{\rho} \equiv \frac{u^2}{2} + \mathfrak{h}, \quad (2.20)$$

onde  $\mathfrak{h} = e + p/\rho$  é a entalpia específica.

Este modelo matemático é capaz de representar escoamentos unidimensionais de fluidos compressíveis e invíscidos, como por exemplo o escoamento de Rayleigh. Considere o volume de controle apresentado na FIGURA 9, onde  $q$  é a quantidade de calor sendo adicionada ao volume de controle e os subscritos 1 e 2 representam dois pontos distintos do escoamento.

FIGURA 9 – VOLUME DE CONTROLE GENÉRICO DE UM ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL.



FONTE: O autor (2019).

Ao aplicar as equações de Euler unidimensionais no volume de controle da FIGURA 9 e considerar a adição de calor, escoamento permanente e área da seção constante, resulta (10)

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2, \\ \mathfrak{h}_1 + \frac{u_1^2}{2} + q &= \mathfrak{h}_2 + \frac{u_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sabendo que  $\mathfrak{h} = c_p T$  e  $c_p T_0 = c_p T + u^2/2$ , onde o subscrito 0 representa propriedade de estagnação ou total, e resolvendo a equação da energia para  $q$ , resulta (10)

$$q = c_p (T_{02} - T_{01}). \quad (2.22)$$

Com os valores de  $q$ ,  $T_{01}$  e  $M_1$  é possível obter  $T_{02}$  por meio da equação (2.22), e  $M_2$ ,  $p_2$  e  $T_2$  por meio das equações (2.23) a (2.25) e  $\rho$  e  $u$  por meio das equações (2.26) e (2.27) (10). Deve-se notar que é possível obter a solução analítica da equação (2.23), por meio de *software* algébrico, ou a solução exata, por meio de um método numérico de obtenção de raízes.

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (2.24)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \quad (2.25)$$

$$p = \rho RT \quad (2.26)$$

$$u = aM \quad (2.27)$$

Desta forma, as soluções analíticas (ou exatas), das propriedades do escoamento de Rayleigh, podem ser obtidas com base nos valores de  $q$ ,  $T_{01}$  e  $M_1$ . Para que este escoamento seja resolvido numericamente, é necessário adicionar a contribuição de  $q$  nas equações de Euler unidimensionais. Isto é feito por meio do termo fonte

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta q \rho u}{\Delta x} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

onde  $\Delta q = q/N$  é a quantidade de calor adicionada em cada nó e  $N$  é a quantidade de nós.

### 2.3.3 Equações de Euler quase unidimensionais

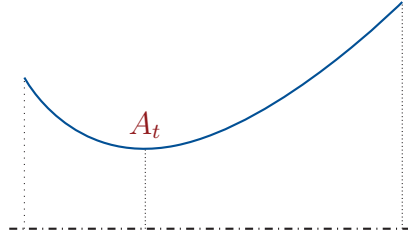
Segundo Anderson (10), para geometrias onde a variação da área é gradual e função de  $x$  apenas, é possível modelar o escoamento como quase unidimensional. Este é o caso de escoamentos em bocais convergentes-divergentes, conforme exemplo da FIGURA 10, onde a área crítica é representada pela área da garganta ( $A_t$ ).

Para o escoamento quase unidimensional, o número de Mach é uma função da área do bocal ( $A$ ) e da menor área do bocal, conhecida como área crítica ( $A^*$ ), (10)

$$\left( \frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}. \quad (2.29)$$

A equação (2.29) fornece uma solução exata para o número de Mach e pode ser resolvida por um método numérico de obtenção de raízes, como o método da bisseção

FIGURA 10 – PERFIL DE UM BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE.



FONTE: O autor (2019).

ou de Newton-Raphson. Porém, deve-se notar que ambos métodos apresentam perda de precisão quando  $A$  se aproxima de  $A^*$ . Nesta situação, recomenda-se calcular a solução com o dobro de dígitos que se deseja obter.

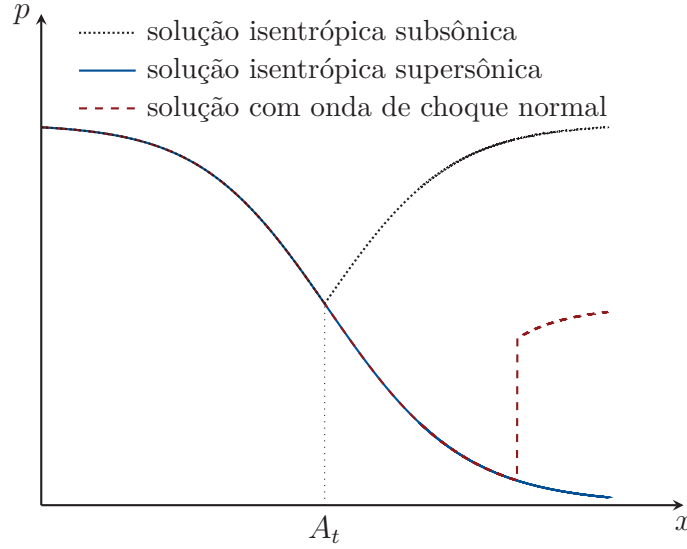
Segundo Anderson (10), podem existir três situações no escoamento quase unidimensional bloqueado no interior de um bocal convergente-divergente: solução isentrópica subsônica (linha pontilhada preta), solução isentrópica supersônica (linha contínua azul) e solução com onda de choque normal no divergente do bocal (linha tracejada vermelha), conforme apresentado na FIGURA 11. O tipo de situação dependerá das condições na entrada e saída do bocal. Por exemplo, considere que a pressão no bocal e nas suas vizinhanças seja a atmosférica ( $p_{atm}$ ). Na medida em que a pressão na entrada do bocal ( $p_0$ ) é aumentada, um escoamento começa a se desenvolver da esquerda para a direita e é totalmente subsônico. Com um novo aumento de  $p_0$ , o escoamento passará a ser transônico na região da garganta do bocal (bloqueado), mas o divergente ainda será subsônico (linha pontilhada). Se a pressão for aumentada até um certo limite, o escoamento será isentrópico e supersônico no divergente do bocal (linha contínua). Caso a  $p_0$  seja aumentada além deste limite, e recaia sobre uma faixa específica, ondas de choque aparecerão no divergente do bocal, caracterizando um escoamento não isentrópico (linha tracejada). Mais detalhes sobre o escoamento quase unidimensional em bocais convergentes-divergentes podem ser encontrados em Anderson (10).

Neste trabalho o interesse recai sobre as soluções supersônicas isentrópica e com choque normal. Na primeira, a solução exata pode ser encontrada com base na área do bocal, na equação (2.29), nas propriedades de entrada do bocal ou propriedades de estagnação, nas propriedades do fluido e nas equações (2.30) a (2.32) e (2.27) (10). Deve-se notar que na equação (2.29)  $A^* = A_t$  para este escoamento. Para o escoamento com onda de choque,  $A^* = A_t$  à justante do choque e é necessário determinar  $A^*$  à montante do choque, pois este causa um aumento na entropia do fluido (10).

$$p_0/p = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.30)$$

$$\rho_0/\rho = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.31)$$

FIGURA 11 – POSSÍVEIS SOLUÇÕES DE ESCOAMENTO BLOQUEADO EM UM BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE.



FONTE: O autor (2019).

$$T_0/T = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (2.32)$$

Para determinar  $A^*$  à jusante do choque, é necessário antes determinar o número de Mach na saída do bocal ( $M_{ex}$ , com a equação (2.33)), a pressão total à jusante do choque ( $p_{0_{ex}}$ ) e o número de Mach imediatamente à jusante ( $M_{Sh1}$ ) e à montante ( $M_{Sh2}$ ) do choque. Com o número de Mach na saída usa-se a equação (2.30) para obter  $p_{0_{ex}}$ . A partir da equação (2.30) em conjunto com as equações (2.34) e (2.35) é possível obter  $M_{Sh1}$ . Agora, com a equação (2.35) obtém-se  $M_{Sh2}$ , e com este resultado é possível utilizar a equação (2.29) para encontrar  $A^*$  à jusante do choque (10).

$$M_{ex}^2 = -\frac{1}{\gamma - 1} + \sqrt{\frac{1}{(\gamma - 1)^2} + \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right) \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left(\frac{p_0 A_t}{p_{0_{ex}} A_{ex}}\right)^2}, \quad (2.33)$$

onde  $A_{ex}$  é a área da saída do bocal.

$$p_{Sh2}/p_{Sh1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{Sh1}^2 - 1), \quad (2.34)$$

onde os subscritos  $Sh_1$  e  $Sh_2$  representam, respectivamente, as posições imediatamente à montante e à jusante do choque.

$$M_{Sh2}^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] M_{Sh1}^2}{\gamma M_{Sh1}^2 - (\gamma - 1)/2} \quad (2.35)$$

Com  $A^*$  à jusante do choque determinada, basta resolver a equação (2.29) com os valores de  $A^*$  relativos à posição do choque. As outras propriedades podem ser obtidas

pelas equações (2.30) a (2.32) e (2.27). Contudo, deve-se notar que  $p_0$  e  $\rho_0$  mudam após o choque, ou seja,  $p_0$  passa a ser  $p_{0ex}$  e  $\rho_0$  pode ser obtido por meio da equação (2.26) (10).

Para que este escoamento quase unidimensional (com ou sem choque) seja resolvido, é necessário adicionar a contribuição da variação da área nas equações de Euler unidimensionais. Isto é feito por meio do termo fonte (46)

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = -\frac{A_x}{A} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(E + p) \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

### 2.3.4 Equações de Euler bidimensionais

Quando um corpo pode ser criado por revolução, é possível modelar o escoamento através ou ao redor desse por um modelo bidimensional axissimétrico, que é o caso de escoamentos internos em bocais e externos em perfis aerodinâmicos (10). Por causa da alta velocidade do escoamento ao redor do corpo, o fluido deve ser modelado como compressível. Para um escoamento invíscido e axissimétrico de um fluido compressível, é possível utilizar as equações de Euler bidimensionais, que na forma compacta são escritas como (47)

$$C^\phi \left[ \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial z} + \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial(\rho \mathbf{r} v \phi)}{\partial \mathbf{r}} \right] = P^\phi, \quad (2.37)$$

onde  $z$  e  $\mathbf{r}$  representam as coordenadas axial e radial,  $v$  é a velocidade na direção  $\mathbf{r}$ . Os parâmetros  $C^\phi$  e  $P^\phi$  são usados para alternar entre as equações de conservação da massa, quantidade de movimento linear (QML) e energia. Informações sobre estes parâmetros são apresentadas na TABELA 5.

TABELA 1 – PARÂMETROS USADOS PARA ALTERNAR ENTRE AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO.

Equação de conservação	$C^\phi$	$P^\phi$
massa	1	0
QML- $z$	1	$-\frac{\partial p}{\partial z}$
QML- $\mathbf{r}$	1	$-\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}$
energia	$c_p$	$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial z} + v \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}$

FONTE: Modificado de Bertoldo (47).

No caso das equações de Euler bidimensionais são raros os escoamentos que possuem solução exata. Porém, nesse trabalho tem-se o interesse em escoamentos que possuam solução analítica ou exata. Assim, será utilizado o método das soluções fabricadas para obter uma solução analítica para um caso especial das equações de Euler bidimensionais axissimétricas. Os detalhes serão apresentados no Capítulo 4.

Outra forma de calcular a solução analítica em problemas bidimensionais é por meio da solução de um problema simplificado. Para isso considere o sistema de coordenadas



cartesiano e a formulação conservativa (44)

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

onde  $\mathbf{G}$  é o vetor dos fluxos conservados na direção  $y$ . Os vetores  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são escritos como (44)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

onde  $v$  é a velocidade na direção  $y$  e  $E$  deve ser calculado por meio da seguinte equação (44)

$$E = \rho\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e\right), \quad \mathbf{v}^2 = (u^2 + v^2). \quad (2.40)$$

Mesmo no sistema de coordenadas cartesiano, é difícil encontrar uma solução analítica ou exata para as equações de Euler. Uma alternativa, seria considerar  $u$ ,  $v$  e  $p$  constantes. Assim, o sistema de equações da equação (2.38) se reduz a

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y = 0, \quad (2.41)$$

ou seja, pode ser entendida como uma equação de advecção linear em duas dimensões. Deste modo, a solução analítica para este escoamento pode ser calculada por

$$\rho^{\text{Analítica}}(x, y, t) = \tilde{\rho}(x - t, y - t), \quad (2.42)$$

onde  $\tilde{\rho}$  representa uma função da condição inicial. Note que as velocidades  $u$  e  $v$  e a pressão possuem valores unitários e constantes no tempo e espaço.

Apesar de se tornar um problema simplificado, ele permite o uso de todas as ferramentas numéricas envolvidas na solução das equações de Euler bidimensionais para um fluido compressível.

## 2.4 Fechamento

Com os princípios físicos apresentados nesse capítulo, é possível entender e discutir sobre os fenômenos que ocorrem nos escoamentos, como a propagação por ondas sonoras e a onda de choque. Agora, com os princípios matemáticos é possível determinar quais métodos numéricos são mais adequados para a solução do escoamento e usá-los. Esses métodos serão apresentados no Capítulo 3

### 3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados os conceitos sobre os métodos numéricos usados para a solução dos escoamentos. Primeiro, serão apresentados detalhes sobre os FD e FV. Depois, conceitos de aplicação de condições de contorno, estratégias de verificação, conceitos sobre a extrapolação de Richardson e, por fim, técnicas de interpolação e regressão polinomial.

#### 3.1 Método das diferenças finitas

Nesta seção será apresentado o procedimento de discretização por FD explícito para uma equação escalar unidimensional, depois para um caso mais geral de sistemas de equações não lineares unidimensionais e, então, para sistemas de equações não lineares bidimensionais.

Considere a malha uniforme apresentada na FIGURA 12, a equação (2.8) e a seguinte aproximação conservativa (39)

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{h} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3.1)$$

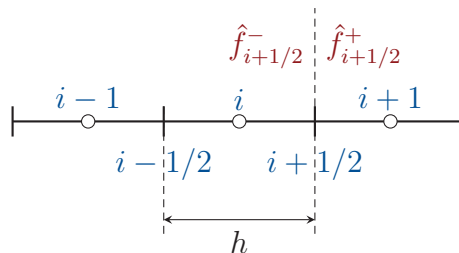
onde  $u_i(t)$  é uma aproximação numérica para  $u$  no nó  $i$ ,  $h$  é o tamanho da partição (nó ou volume) e  $\hat{f}$  é o fluxo numérico, avaliado nas interfaces  $i + 1/2$  e  $i - 1/2$ .

O próximo passo é o uso de uma partição de fluxo. Uma das mais simples e suave, porém, mais dissipativa é a partição de fluxo de Lax–Friedrichs (39)

$$f^\pm = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u), \quad (3.2)$$

onde  $f^\pm$  são as partições de fluxo à esquerda ou à direita da interface e  $\alpha = \max_u |f'(u)|$  é o maior autovalor e é calculado em uma faixa relevante de  $u$ . Se todo o domínio de  $u$  for utilizado, o cálculo será mais robusto, porém, mais dissipativo. Outra alternativa seria usar apenas a faixa de valores de  $u$  onde deseja-se fazer a partição de fluxo. Note que o jacobiano para a da equação de advecção linear resulta  $f'(u) = 1$ .

FIGURA 12 – EXEMPLO DA DISPOSIÇÃO DOS NÓS E DOS FLUXOS NUMÉRICOS.



FONTE: O autor (2019).

Segundo Shu (39), a aproximação para a derivada começa com a escolha da partição de fluxo. Então, identifica-se  $\bar{v}_i = f^+(u_i)$  e usa-se uma aproximação numérica para obter  $v_{i+1/2}^-$  nos pontos do domínio. Com estas informações, é possível calcular o fluxo numérico

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^+ = v_{i+\frac{1}{2}}^-. \quad (3.3)$$

De maneira análoga,  $\bar{v}_i = f^-(u_i)$ , com uma aproximação numérica obtém-se  $v_{i+1/2}^+$  para todo o domínio e o fluxo numérico negativo é calculado como

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^- = v_{i+\frac{1}{2}}^+. \quad (3.4)$$

Com estas informações, é possível obter o fluxo numérico

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^+ + \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^-, \quad (3.5)$$

e formar o esquema da equação (3.1).

As aproximações numéricas são feitas sobre os valores de  $\bar{v}_i$ , por exemplo, no caso da aproximação *upwind*, de primeira ordem, usa-se

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2}}^+ &= \bar{v}_{i+1}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^- &= \bar{v}_i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para o WENO-Z de quinta ordem, usa-se (48)

$$v_{i+\frac{1}{2}}^- = \omega_0 f_0 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2, \quad (3.7)$$

onde  $\omega$  são os pesos não lineares e  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$  são aproximações polinomiais para  $v_{i+\frac{1}{2}}^-$ .

A metodologia para o cálculo dos pesos não lineares e outros parâmetros do WENO-Z foi apresentada por Borges et al. (48). No caso dos pesos não lineares tem-se

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{j=0}^2 \alpha_j}, \quad k = 0, \dots, 2, \quad (3.8)$$

e  $\alpha_k$  são os pesos não lineares não normalizados e podem ser calculados como (48)

$$\alpha_k = d_k \left[ 1 + \left( \frac{\tau_W}{\beta_k + \epsilon} \right)^{p_W} \right], \quad k = 0, \dots, 2, \quad (3.9)$$

onde  $d_k$  são os pesos ideais,  $\tau_W$  é o indicador de suavidade global,  $\beta_k$  são os indicadores locais de suavidade,  $p_W$  é o parâmetro de potência e  $\epsilon$  é o parâmetro de sensibilidade. Neste caso,  $p_W = 2$  e  $\epsilon = 10^{-40}$ , conforme informado pelos autores (48). Os pesos ideais e os indicadores de suavidade são calculados como (48)

$$d_0 = \frac{1}{10}, \quad d_1 = \frac{6}{10}, \quad d_2 = \frac{3}{10}, \quad (3.10)$$

$$\tau_W = |\beta_0 - \beta_2|, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12}(\bar{v}_{i-2} - 2\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_i)^2 + \frac{1}{4}(\bar{v}_{i-2} - 4\bar{v}_{i-1} + 3\bar{v}_i)^2, \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(\bar{v}_{i-1} - 2\bar{v}_i + \bar{v}_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(\bar{v}_{i-1} - \bar{v}_{i+1})^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(\bar{v}_i - 2\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\bar{v}_i - 4\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i+2})^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por fim, as aproximações polinomiais podem ser calculadas como

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2\bar{v}_{i-2} - 7\bar{v}_{i-1} + 11\bar{v}_i}{6}, \\ f_1 &= \frac{-\bar{v}_{i-1} + 5\bar{v}_i + 2\bar{v}_{i+1}}{6}, \\ f_2 &= \frac{2\bar{v}_i + 5\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_{i+2}}{6}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Deve-se notar que a equação (3.7) fornece uma aproximação para  $v_{i+1/2}^-$  com base no estêncil de cinco pontos  $S = \{\bar{v}_{i-2}, \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}, \bar{v}_{i+2}\}$ . Agora, para aproximar  $v_{i+1/2}^+$  deve-se usar  $S = \{\bar{v}_{i+3}, \bar{v}_{i+2}, \bar{v}_{i+1}, \bar{v}_i, \bar{v}_{i-1}\}$ .

Destaca-se que o procedimento apresentado fornece aproximações para  $\hat{f}_{i+1/2}$  e, de maneira análoga, poderiam ser obtidas aproximações para  $\hat{f}_{i-1/2}$ . Além disso, este procedimento fornece uma aproximação para a derivada espacial da equação (2.8) e, para resolvê-la, é necessário uma integração no tempo. Esta integração pode ser feita, por exemplo, por meio do método de Runge-Kutta (RK) de terceira ordem (39)

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\ u^{(2)} &= \frac{3u^n + u^{(1)} + \Delta t L(u^{(1)})}{4}, \\ u^{n+1} &= \frac{u^n + 2u^{(2)} + 2\Delta t L(u^{(2)})}{3}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde os sobrescritos 1, 2,  $n$  e  $n+1$  representam, respectivamente, o primeiro e segundo estágios, o passo de tempo atual e o próximo,  $\Delta t$  é o passo de tempo e  $L(\cdot)$  é a aproximação espacial.

No caso das equações de Euler unidimensionais (equação (2.10)), a forma mais robusta de realizar a aproximação espacial é por meio da decomposição em variáveis características (39). Após a decomposição, o procedimento é semelhante ao apresentado anteriormente. Primeiro, calcula-se  $u_{ci+1/2,m}$  por uma média aritmética (39). Note que  $u_c$  e o subscrito  $m$  representam as componentes de  $\mathbf{U}$  e deve ser entendido que os procedimentos devem ser realizados para todas as suas componentes. Assim, é possível calcular os autovalores e autovetores pelas equações (2.17) a (2.19) com base em (39)  $\mathbf{U}_{i+1/2}$ .

Com os autovetores calculados, basta transformar as variáveis conservativas e o fluxo nas variáveis características e seu fluxo (39)

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{L}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}})\mathbf{U}_i, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{L}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}})\mathbf{F}(\mathbf{U}_i). \quad (3.15)$$

Então, o procedimento apresentado anteriormente deve ser aplicado em cada uma das componentes de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{H}$ , para obter o fluxo numérico correspondente  $\hat{h}_{i+1/2,m}^\pm$ , onde  $m = 1, \dots, 3$  para as equações de Euler unidimensionais (39). Note que, neste caso,  $\alpha$  é o maior dos autovalores de  $\mathbf{U}$ , tomado em uma faixa de valores relevante.

Assim que as componentes  $\hat{h}_{i+1/2,m}$  forem calculadas, basta retornar às variáveis conservativas (39)

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}})\hat{\mathbf{H}}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (3.16)$$

onde os vetores  $\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{i+1/2}$  armazenam as componentes  $\hat{f}_{i+1/2,m}$  e  $\hat{h}_{i+1/2,m}$ , respectivamente.

Para as equações bidimensionais, o procedimento é o mesmo das equações unidimensionais. Porém, deverá ser feito nas duas direções coordenadas.

### 3.2 Método dos volumes finitos

O FV será utilizado para resolver as equações linear de advecção e de Euler quase unidimensionais e bidimensionais. O primeiro problema será resolvido por meio de FV explícito e os demais por FV implícito. Primeiro, será apresentado o procedimento de discretização para a equação de advecção linear e, na sequência, para as equações de Euler.

Novamente, considere malha uniforme e a equação (2.8). Porém, ao invés de resolver esta equação, o FV resolve a integral da mesma (39)

$$\frac{d\bar{u}(x_i,t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left[ f(u(x_{i+1/2,t})) - f(u(x_{i-1/2,t})) \right], \quad (3.17)$$

onde

$$\bar{u}(x_i,t) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\phi,t) d\phi \quad (3.18)$$

é a média da propriedade no volume  $i$  e  $\phi$  é uma variável auxiliar da integração.

A equação (3.17) é aproximada pelo seguinte esquema conservativo (39)

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left( \hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2} \right). \quad (3.19)$$

O fluxo numérico para FV implícito é definido da seguinte forma (39)

$$\hat{f}_{i+1/2} = l \left( u_{i+1/2}^-, u_{i+1/2}^+ \right). \quad (3.20)$$

Note que  $u_{i+1/2}^{\pm}$  é obtido pelas mesmas aproximações WENO-Z e *upwind*, apresentadas anteriormente. A função  $l$  representa um fluxo monótono. Dentre os fluxos monótonos, um dos mais simples, porém, mais dissipativo é o fluxo de Lax-Friedrichs (39)

$$l(a,b) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - \alpha(b-a)], \quad (3.21)$$

onde  $\alpha$  é o mesmo da partição de fluxo de Lax-Friedrichs (equação (3.2)).

A integração no tempo do FV explícito é a mesma do FD explícito, ou seja, é feita pela equação (3.14).

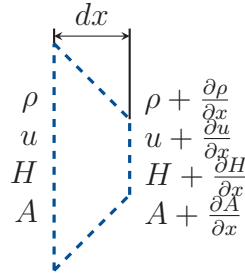
Para o FV implícito, as equações de Euler quase unidimensionais são reescritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A u)}{\partial x} &= -A \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \oint_A \rho \mathbf{v} H \cdot d\mathbf{A} &= 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

sendo  $\mathbf{v}$  é o vetor de velocidades.

Na equação (3.22), a equação de conservação da energia está na forma integral, pois é possível considerar que a entalpia total é constante para todo o escoamento. Para tal, considere o volume de controle infinitesimal da FIGURA 13.

FIGURA 13 – VOLUME DE CONTROLE INFINITESIMAL.



FONTE: O autor (2019).

Ao aplicar a equação de conservação da energia no volume infinitesimal, resulta

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) \left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right) - \rho u H A = 0, \quad (3.23)$$

desprezando os produtos de derivadas e utilizando a regra da cadeia:

$$A H u \frac{\partial \rho}{\partial x} + A H \rho \frac{\partial u}{\partial x} + A \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + H \rho u \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u H A) = 0 \quad (3.24)$$

Utilizando novamente a regra da cadeia e a equação de conservação da massa ( $\partial(\rho u A)/\partial x = 0$ ), resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u H A) = H \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) + \rho u A \frac{\partial H}{\partial x} = \rho u A \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (3.25)$$

ou ainda

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad H = \text{cte.} \quad (3.26)$$

Deste modo, não é necessário resolver numericamente a equação de conservação da energia, pois é possível obter a temperatura por meio da entalpia total

$$H = c_P T_0 = c_P T + \frac{u^2}{2}. \quad (3.27)$$

Deve-se notar que  $H$  depende de  $c_p$  e  $T_0$  e que  $T_0$  é constante em todo escoamento, mesmo que esse contenha choques (10).

Para o escoamento 2D, a equação de conservação da Energia na forma diferencial pode ser escrita da seguinte maneira (41)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H) = 0. \quad (3.28)$$

Considerando escoamento em regime permanente, sistema de coordenadas cartesiano e regra da cadeia, é possível escrever

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v H) = \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} + H \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (3.29)$$

inserindo a equação de conservação da massa ( $\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y = 0$ ) nessa última

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (3.30)$$

ou ainda ( $\partial H/\partial t = 0$ ) (49),

$$\frac{DH}{Dt} = 0. \quad (3.31)$$

Estes resultados permitem apresentar um procedimento de solução das equações de Euler onde não é necessário resolver a equação de conservação da energia para escoamentos quase unidimensionais e bidimensionais.

Segundo Versteeg e Malalasekera (40), inicia-se o procedimento de discretização por meio de uma integração das equações que se deseja resolver. Considerando malha uniforme e integração no tempo totalmente implícita, o seguinte é válido para a equação de conservação da massa unidimensional

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} dx dt, \quad (3.32)$$

$$h A_i (\rho_i - \rho_i^0) + \Delta t \left[ (\rho u A)_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u A)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.33)$$

onde  $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $i \pm 1/2$  representam as faces dos volumes e o sobrescrito 0 passo de tempo anterior.



Para aproximar as propriedades do escoamento, antes é necessário realizar uma linearização para que os efeitos da velocidade e da massa específica sejam considerados, ou seja, (van Doormaal(50), 1985 apud Marchi e Maliska(51), 1994)

$$\rho u A = \rho^* u A + \rho u^* A - \rho^* u^* A, \quad (3.34)$$

onde o sobrescrito  $*$  representa a iteração anterior.

A aproximação numérica será feita por meio do *upwind*, que para a massa específica resulta

$$\rho_{i+\frac{1}{2}} = \rho_i. \quad (3.35)$$

Neste procedimento, o acoplamento entre as equações é tratado por meio do algoritmo SIMPLEC, que transforma a equação de conservação da massa em uma equação para a solução da correção da pressão por meio do seguinte (52)

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^* - d_{i+\frac{1}{2}}(p'_{i+1} - p'_i), \quad (3.36)$$

$$\rho_i = \rho_i^* + \frac{p'_i}{RT_i}, \quad (3.37)$$

onde  $d$  é um coeficiente do SIMPLEC e  $p'$  é o termo de correção da pressão. O coeficiente e a pressão corrigida podem ser calculados por meio das seguintes equações (52)

$$d_{i+\frac{1}{2}} = \frac{d_i + d_{i+1}}{2}, \quad (3.38)$$

$$d_i = \frac{A_i}{a_{i-1}^u + a_i^u + a_{i+1}^u}, \quad (3.39)$$

$$p = p' + p^*, \quad (3.40)$$

onde  $a^u$  são os coeficientes do sistema linear resultante da discretização da QML; mais detalhes serão apresentados no Capítulo 4.

Agora, a integração totalmente implícita da QML unidimensional para uma malha uniforme fica

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A u)}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} dx dt, \quad (3.41)$$

$$h(\rho_i u_i - \rho_i^0 u_i^0) + \Delta t \left\{ [(\rho u A u)_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u A u)_{i-\frac{1}{2}}] + A_i (p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}) \right\}, \quad (3.42)$$

onde a seguinte linearização se aplica

$$\rho u A u = \rho u A u^*, \quad (3.43)$$

$\rho_{i\pm 1/2}$  e  $u_{i\pm 1/2}^*$  são conhecidos e calculados por meio das seguintes relações (53)

$$\rho_{i+\frac{1}{2}} = \rho_i, \quad (3.44)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{\left[ -\sum_i - \sum_{i+1} + h u_{i+\frac{1}{2}}^0 \frac{\rho_i^0 A_i - \rho_{i+1}^0 A_{i+1}}{\Delta t} - 2A_{i+\frac{1}{2}}(p_{i+1} - p_i) \right]}{(a_i)_i + (a_i)_{i+1}}, \quad (3.45)$$

$$\sum_i = (a_{i+1}^u)_i u_{i+1} + (a_{i-1}^u)_i u_{i-1}, \quad (3.46)$$

$$\sum_{i+1} = (a_{i+1}^u)_{i+1} u_{i+2} + (a_{i-1}^u)_{i+1} u_i, \quad (3.47)$$

onde, por exemplo,  $(a_i^u)_i$  implica em avaliar  $a_i^u$  no volume  $i$  e  $(a_i^u)_{i+1}$  implica em avaliar  $a_i$  no volume  $i+1$ ; note que  $(a_i^u)_{i+1} \neq a_{i+1}^u$ .

A velocidade e a pressão na equação (3.42) são aproximadas por *upwind* e CDS, que resultam (53)

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u_i, \quad (3.48)$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = \frac{p_i + p_{i+1}}{2}. \quad (3.49)$$

Após a solução das equações, é preciso atualizar os campos das propriedades por meio das equações (3.40), (3.50), (3.51) e (3.52) (53).

$$u_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}} - d_{i+\frac{1}{2}}(p'_{i+1} - p'_i) \quad (3.50)$$

$$u_i = u_i - d_i \frac{(p'_{i+1} - p'_{i-1})}{2} \quad (3.51)$$

$$\rho = \rho + \frac{p'}{RT} \quad (3.52)$$

Deve-se notar que o procedimento usado para obter as propriedades na face  $i - 1/2$  é análogo ao apresentado para a face  $i + 1/2$  e não será detalhado.

O procedimento de discretização das equações bidimensionais de Euler é semelhante ao apresentado para as equações unidimensionais de Euler e difere em três aspectos: transformação do sistema de coordenadas, existência da QML na direção  $y$  e de termos para representar o escoamento nessa direção.

Segundo Lomax, Pulliam e Zingg (38) e Ferziger e Perić (4), a discretização por FV parte da forma integral das equações, e é genérica, ou seja, pode ser feita em qualquer tipo de malha e geometria e é conservativa por natureza. Apesar de ser genérica, é interessante

utilizar transformação de coordenadas para produzir um domínio computacional ortogonal e uniforme, pois, desta forma, os processos de discretização e aproximações numéricas são triviais (4, 40). Segundo Maliska (52), o procedimento de transformação ocorre em duas etapas, a primeira transforma o sistema de coordenadas, por meio de relações como as equações (3.53) a (3.55), e fornece as métricas da transformação. Após esta etapa, transforma-se o modelo matemático e a discretização é feita a partir do modelo transformado.

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad (3.53)$$

$$\eta = \eta(x, y, z) \quad (3.54)$$

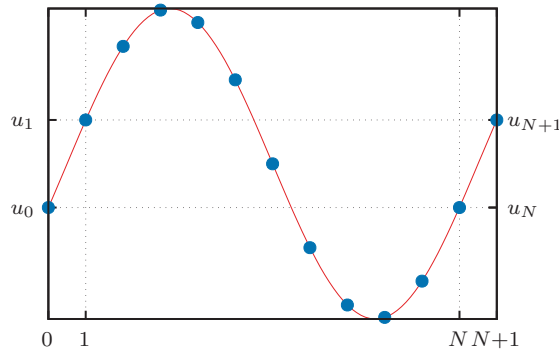
$$\Gamma = \Gamma(x, y, z) \quad (3.55)$$

Os procedimentos apresentados para o FV implícito resultam em sistemas lineares tridiagonais e pentadiagonais, que podem ser resolvidos iterativamente por métodos como o TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*) (4, 40) e o MSI (*Modified Strongly Implicit*) (54).

### 3.3 Condições de contorno

Neste trabalho, as condições de contorno serão aplicadas de quatro formas diferentes: condições de contorno periódicas, de Dirichlet, de Neumann e procedimento *Inverse Lax-Wendroff* (ILW) (55, 56). A primeira é a forma mais simples e necessita que a solução seja periódica no domínio de cálculo, por exemplo, como mostra a FIGURA 14. Ainda, observa-se que o valor do nó (ou volume) fictício à esquerda do primeiro real é igual ao do último real. Assim, as condições de contorno podem ser aplicadas conforme equação (3.56).

FIGURA 14 – EXEMPLO DE SOLUÇÃO PERIÓDICA.



FONTE: O autor (2019).

$$\begin{aligned} u_0 &= u_N \\ u_{N+1} &= u_1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

A condição de contorno de Dirichlet considera um valor fixo no contorno e a propriedade no volume fictício pode ser obtida por meio de uma média aritmética ou interpolação. Para a condição de contorno de Neumann, considera-se uma derivada no contorno e a propriedade no volume fictício pode ser obtida por meio de uma aproximação numérica (52).

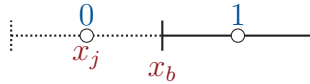
O procedimento ILW será utilizado em conjunto com FD explícito e as equações de Euler unidimensionais e quase unidimensionais. Por isso, o procedimento será detalhado para estas equações.

Será utilizada uma expansão por série de Taylor para extrapolar as condições de contorno para os nós fictícios (55)

$$(u_{cm})_j = \sum_{k=0}^4 \frac{(x_j - x_b)^k}{k!} u_m^{*(k)}, \quad (3.57)$$

onde  $u_{cm}^{*(k)}$  é uma aproximação para a derivada de ordem  $k$  da componente  $m$  de  $\mathbf{U}$  no contorno e  $x_b$  é a posição do contorno, conforme apresentado na FIGURA 15. Note que a ordem dessa expansão é cinco. Discussões sobre a ordem da expansão serão apresentadas nos Capítulos 4 e 5.

FIGURA 15 – EXEMPLO DA DISPOSIÇÃO DO NÓ FICTÍCIO.



FONTE: O autor (2019).

É comum que o escoamento seja subsônico no contorno esquerdo de um bocal convergente-divergente. Neste caso e considerando escoamento no sentido positivo de  $x$ , o primeiro autovalor será negativo e os demais positivos. Como é um contorno de entrada (*inflow*), devem ser impostas duas condições de contorno e deve-se extrapolar uma variável característica. Como o primeiro autovalor é negativo, extrapola-se a primeira componente das variáveis características.

No caso do contorno esquerdo, serão fornecidas as componentes 1 e 2 do vetor de variáveis conservativas, que possuem valores prescritos, e extrapolada a primeira componente do vetor de variáveis características, ou seja (55)

$$u_{c1}^{*(0)} = \rho_l, \quad (3.58)$$

$$u_{c2}^{*(0)} = \rho_l u_l, \quad (3.59)$$

$$u_{c3}^{*(0)} = \frac{v_1^{*(0)} - l_{1,1}(\mathbf{U}_1)u_{c1}^{*(0)} - l_{1,2}(\mathbf{U}_1)u_{c2}^{*(0)}}{l_{1,3}}, \quad (3.60)$$

onde o subscrito  $l$  representa a posição do contorno esquerdo,  $v_m^{*(k)}$  é uma aproximação para a derivada de ordem  $k$  da componente  $m$  do vetor de variáveis características no contorno e  $l_i$  são as componentes do autovetor à esquerda. Destaca-se que o autovetor à esquerda pode ser obtido a partir do nó real mais próximo, no caso o 1 (55).

Para determinar as aproximações  $v_m^{*(k)}$  sugere-se o uso de polinômios interpoladores ou extrapolação do tipo WENO (55, 56); este último quando houver choques ou descontinuidades.

Para obter  $u_{cm}^{*(1)}$ , usa-se a própria equação diferencial para as componentes 1 e 2 do vetor de variáveis conservativas e a aproximação para  $v_1^{*(1)}$ , ou seja (55)

$$\begin{aligned} u_{c2}^{*(1)} &= -g'_1 + S_1(\mathbf{U}), \\ (\gamma - 1)u_{c3}^{*(1)} + \frac{3 - \gamma}{2} \left( \frac{2u_{c2}^{*(0)}}{u_{c1}^{*(0)}} u_{c2}^{*(1)} - \left( \frac{u_{c2}^{*(0)}}{u_{c1}^{*(0)}} \right)^2 u_{c1}^{*(1)} \right) &= -g'_2 + S_2(\mathbf{U}), \\ l_{1,1}(\mathbf{U}_1)u_{c1}^{*(1)} + l_{1,2}(\mathbf{U}_1)u_{c2}^{*(1)} + l_{1,3}(\mathbf{U}_1)u_{c3}^{*(1)} &= v_1^{*(1)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $g'_1$  e  $g'_2$  são derivadas em relação ao tempo das condições de contorno das componentes 1 e 2 do vetor de variáveis conservativas. Como o escoamento é em regime permanente,  $g'_1 = g'_2 = 0$ .

Para obter  $u_{cm}^{*(k)}$  com  $k = 2, \dots, 4$ , é suficiente utilizar as aproximações  $v_m^{*(k)}$ , ou seja (55, 56)

$$\begin{aligned} l_{1,1}(\mathbf{U}_1)u_{c1}^{*(k)} + l_{1,2}(\mathbf{U}_1)u_{c2}^{*(k)} + l_{1,3}(\mathbf{U}_1)u_{c3}^{*(k)} &= v_1^{*(k)}, \\ l_{2,1}(\mathbf{U}_1)u_{c1}^{*(k)} + l_{2,2}(\mathbf{U}_1)u_{c2}^{*(k)} + l_{2,3}(\mathbf{U}_1)u_{c3}^{*(k)} &= v_2^{*(k)}, \\ l_{3,1}(\mathbf{U}_1)u_{c1}^{*(k)} + l_{3,2}(\mathbf{U}_1)u_{c2}^{*(k)} + l_{3,3}(\mathbf{U}_1)u_{c3}^{*(k)} &= v_3^{*(k)}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ao obter  $u_{cm}^{*(0)}$  e resolver os sistemas das equações (3.61) e (3.62), os valores de  $u_{cm}^{*(k)}$  estarão determinados no contorno e os nós fictícios podem ser calculados por meio da equação (3.57).

No contorno direito, o escoamento pode ser supersônico ou subsônico, se existir um choque normal no divergente do bocal. No caso de escoamento supersônico e no sentido positivo de  $x$ , os três autovalores serão positivos. Como é um contorno de saída (*outflow*), devem ser extrapoladas as três componentes das variáveis características.

Primeiro, obtêm-se as aproximações  $v_m^{*(k)}$  para o contorno direito por meio de polinômios interpoladores ou da extrapolação do tipo WENO e, após isso, calculam-se os

valores de  $u_{cm}^{*(k)}$  por meio do seguinte sistema linear (55, 56)

$$\begin{aligned} l_{1,1}(\mathbf{U}_N)u_{c1}^{*(k)} + l_{1,2}(\mathbf{U}_N)u_{c2}^{*(k)} + l_{1,3}(\mathbf{U}_N)u_{c3}^{*(k)} &= v_1^{*(k)}, \\ l_{2,1}(\mathbf{U}_N)u_{c1}^{*(k)} + l_{2,2}(\mathbf{U}_N)u_{c2}^{*(k)} + l_{2,3}(\mathbf{U}_N)u_{c3}^{*(k)} &= v_2^{*(k)}, \\ l_{3,1}(\mathbf{U}_N)u_{c1}^{*(k)} + l_{3,2}(\mathbf{U}_N)u_{c2}^{*(k)} + l_{3,3}(\mathbf{U}_N)u_{c3}^{*(k)} &= v_3^{*(k)}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

com  $k = 0, \dots, 4$ .

Com os valores de  $u_{cm}^{*(k)}$  determinados para o contorno direito, os nós fictícios podem ser calculados por meio da equação (3.57).

No caso de escoamento subsônico e no sentido positivo de  $x$ , o primeiro autovalor é negativo e os demais são positivos. Então, deve ser imposta uma condição de contorno, que é prescrita, e devem ser extrapoladas duas variáveis características. Como o segundo e terceiro autovalores são positivos, extrapolam-se a segunda e terceira componentes das variáveis características.

Para obter  $u_{cm}^{*(0)}$ , calcula-se

$$u_{c1}^{*(0)} = \rho_r, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} l_{2,1}(\mathbf{U}_N)u_{c1}^{*(0)} + l_{2,2}(\mathbf{U}_N)u_{c2}^{*(0)} + l_{2,3}(\mathbf{U}_N)u_{c3}^{*(0)} &= v_2^{*(0)}, \\ l_{3,1}(\mathbf{U}_N)u_{c1}^{*(0)} + l_{3,2}(\mathbf{U}_N)u_{c2}^{*(0)} + l_{3,3}(\mathbf{U}_N)u_{c3}^{*(0)} &= v_3^{*(0)}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde o subscrito  $r$  representa a posição do contorno direito.

Para obter  $u_{cm}^{*(1)}$ , novamente, usa-se a própria equação diferencial para a componente 1 do vetor de variáveis conservativas e as aproximações para  $v_2^{*(1)}$  e  $v_3^{*(1)}$ . Lembrando que estas aproximações foram obtidas por polinômios interpoladores, resulta (55)

$$\begin{aligned} u_{c2}^{*(1)} &= S_1(\mathbf{U}), \\ l_{2,1}(\mathbf{U}_N)u_{c1}^{*(1)} + l_{2,2}(\mathbf{U}_N)u_{c2}^{*(1)} + l_{2,3}(\mathbf{U}_N)u_{c3}^{*(1)} &= v_2^{*(1)}, \\ l_{3,1}(\mathbf{U}_N)u_{c1}^{*(1)} + l_{3,2}(\mathbf{U}_N)u_{c2}^{*(1)} + l_{3,3}(\mathbf{U}_N)u_{c3}^{*(1)} &= v_3^{*(1)}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Para obter  $u_{cm}^{*(k)}$  com  $k = 2, \dots, 4$ , é suficiente utilizar as aproximações  $v_m^{*(k)}$  (55, 56).

Ao obter  $u_{cm}^{*(0)}$  e resolver os sistemas das equações (3.66) e (3.63) (com  $k = 2, \dots, 4$ ), os valores de  $u_{cm}^{*(k)}$  estarão determinados no contorno direito e os nós fictícios podem ser calculados por meio da equação (3.57).

Destaca-se que os valores de  $\rho_l$ ,  $u_l$  e  $\rho_r$  são obtidos com a solução analítica.

Em resumo, a condição de contorno periódica será aplicadas à equação de advecção linear e equações de Euler bidimensionais resolvidas por FD explícito, as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann às equações de Euler quase unidimensionais e

bidimensionais resolvidas por FV implícito e a técnica ILW será aplicada às equações de Euler unidimensionais e quase unidimensionais resolvidas por FD explícito.

### 3.4 Verificação

Na área numérica existem mais de uma fonte de erro (1). Conforme citado anteriormente, as principais são: erros de discretização, arredondamento e iteração. Para cada fonte de erro existe uma estratégia para reduzi-la. Os erros de arredondamento são reduzidos por meio do uso de precisão de cálculo elevada. Os erros de iteração são reduzidos quando um processo iterativo atinge um grande número de iterações, isto, pois quando a quantidade de iterações tende ao infinito a solução numérica tende à solução exata do sistema de equações. Por fim, os erros de discretização podem, por exemplo, ser reduzidos por meio de obtenção de solução em malhas mais finas e extrapolação (1).

Conforme citado em ASME (3), a verificação envolve avaliação e estimativa do erro numérico em um processo sistemático de refino de malha. Esta análise é feita por meio do próprio erro, estimativa do erro numérico ou ordens de acurácia. Para que sejam obtidos resultados confiáveis, a ordem aparente  $p_U$  deve se aproximar da ordem assintótica ( $p_0$ ) monotonicamente em mais de três malhas (33, 3). A ordem assintótica depende dos esquemas e aproximações utilizados e é obtida a priori, independentemente da solução numérica (33, 57). Neste trabalho, os problemas terão solução analítica ou exata e, portanto, a ordem efetiva será utilizada ao invés da ordem aparente.

As análises de erro e de ordem serão feitas em todo o campo de solução por meio da média da norma  $L^1$ , que pode ser calculada como

$$L_g^{1m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |E_{h_{g,i}}^m|, \quad (3.67)$$

com

$$E_{h_{g,i}}^m = u_i^{\text{analítico}} - u_{g,i}^m, \quad (3.68)$$

onde  $E_h$  é o erro numérico, os sobrescritos “analítico” e  $m$  representam a solução analítica ou exata e o nível de CRE e o subscrito  $g$  o nível de malha. Note que  $m = 0$  representa a solução numérica sem a aplicação de CRE. Para facilitar a leitura, a solução numérica sem a aplicação de CRE não possuirá sobrescrito.

A ordem efetiva pode ser calculada como

$$p_{E_g}^m = \frac{\log_{10}(L_{g-1}^{1m}/L_g^{1m})}{\log_{10}(r)}, \quad (3.69)$$

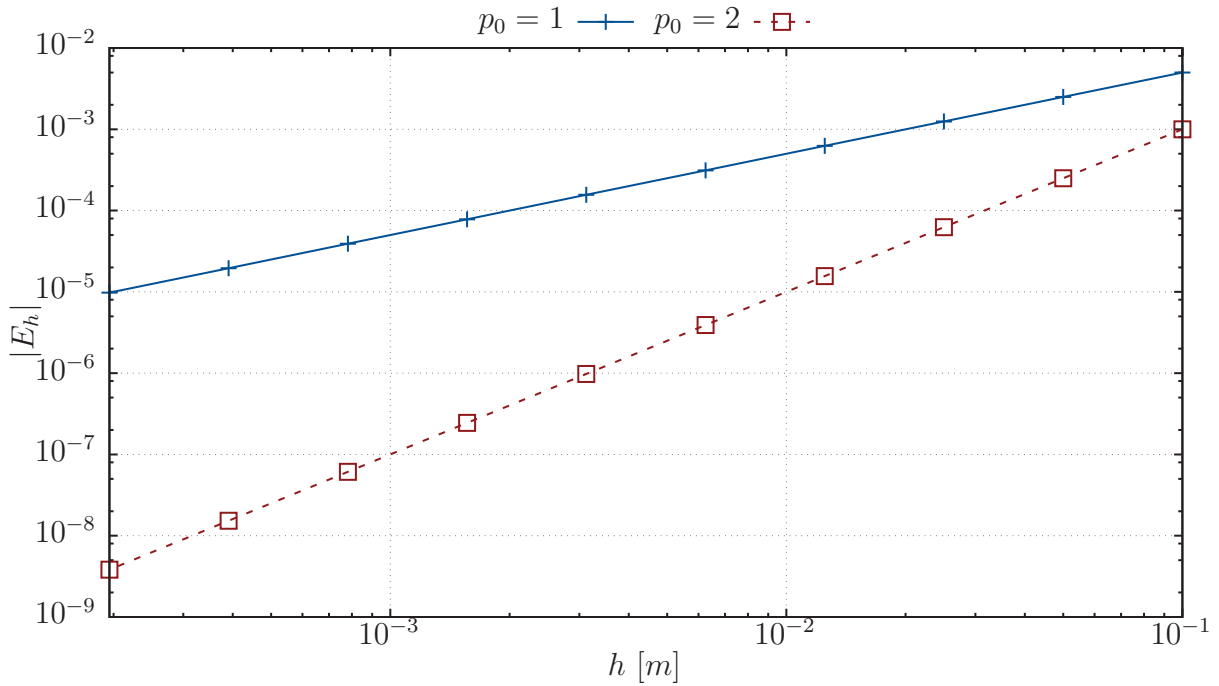
onde  $r = h_{g-1}/h_g$  é a razão de refino.

Os comportamentos do erro e das ordens esperados são apresentados nas FIGURAS 16 e 17. Nestas últimas, é possível observar erros de ordem assintótica um e dois e



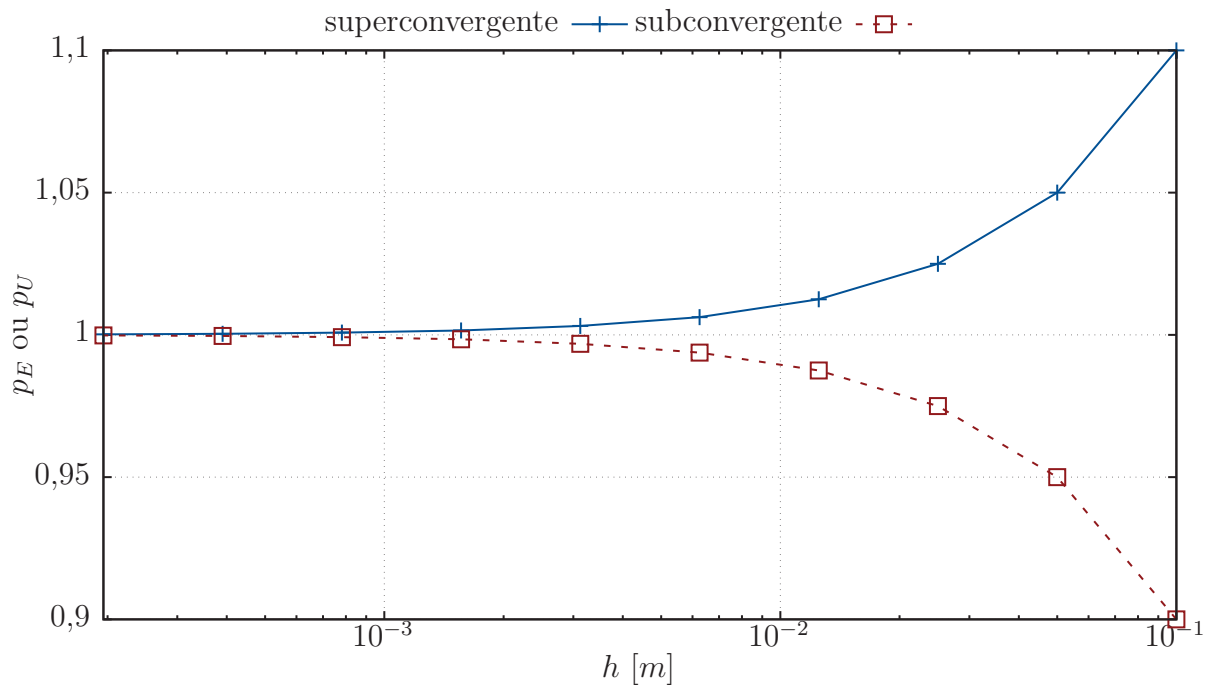
comportamentos sub e superconvergentes das ordens (1). Espera-se que, independente da aproximação numérica, os erros e ordens apresentem comportamento qualitativamente semelhante.

FIGURA 16 – COMPORTAMENTO ESPERADO PARA O MÓDULO DOS ERROS NUMÉRICOS.



FONTE: O autor (2019).

FIGURA 17 – COMPORTAMENTOS ESPERADOS PARA A ORDEM EFETIVA.



FONTE: O autor (2019).

### 3.5 Extrapolação de Richardson

A RE tem como base a hipótese de que as soluções discretas têm uma representação por série em função do tamanho da partição (nó ou volume). Por exemplo, (57)

$$u = u^{\text{analítico}} + c_1 h^{p_0} + c_2 h^{p_1} + c_3 h^{p_2} + \mathcal{O}(h^{p_3}), \quad (3.70)$$

sendo  $p_v$ , com  $v = 0, \dots$ , são as ordens verdadeiras do erro e dependem dos esquemas e aproximações numéricas. Para a aproximação *upwind*,  $p_v = 1, 2, 3, \dots$ , e para a WENO-Z,  $p_v = 5, 6, 7, \dots$  (1, 48).

Conforme a malha é refinada ( $h \rightarrow 0$ ), o primeiro termo de  $h$  passa a dominar sobre os demais e a solução numérica pode ser representada como (1)

$$u = u_\infty + c_1 h^{p_v}, \quad (3.71)$$

sendo que  $u_\infty$  pode ser entendido como uma aproximação para a solução analítica ou exata ou como a solução extrapolada.

Caso as soluções numéricas em duas malhas distintas estejam calculadas,  $u_\infty$  pode ser determinada como

$$u_{\infty,g,i} = u_{g,i} + \frac{u_{g,i} - u_{g-1,i}}{r^{p_v} - 1}. \quad (3.72)$$

Roache e Knupp (30) desenvolveram um procedimento com base na equação (3.72) para o campo de solução, chamado de CRE, usando FD e uma malha com nós coincidentes. Uma vez que a malha possui nós coincidentes, eles propuseram

$$u_{\infty,g,i} = u_{g,i} + C_i, \quad (3.73)$$

com a seguinte correção

$$C_i = \frac{u_{g,i} - u_{g-1,i}}{r^{p_v} - 1}, \quad (3.74)$$

para nós coincidentes (por exemplo, veja os nós  $u_{1,i-3}$ ,  $u_{2,i-3}$  e  $u_{3,i-3}$  da FIGURA 18) e

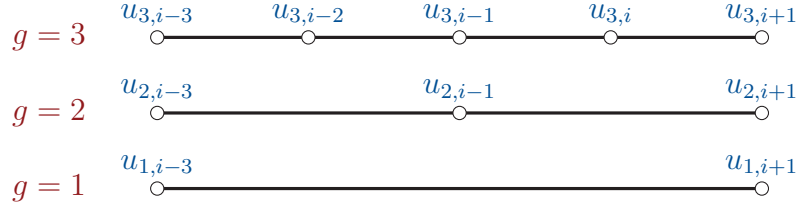
$$C_i = \frac{C_{i+1} + C_{i-1}}{2}, \quad (3.75)$$

para os demais nós (por exemplo, veja o nó  $u_{3,i-2}$  da FIGURA 18).

Considere a CRE com repetição. A FIGURA 18 apresenta três malhas diferentes com  $r = 2$  e a solução numérica sem CRE. Deseja-se avaliar a ordem de acurácia no nó  $i$  com dois níveis de CRE.

O erro de uma aproximação numérica de primeira ordem em um nó (ou volume) genérico (e.g.,  $i - 3$ ,  $i - 1$ ,  $i$  e  $i + 1$ ) pode ser avaliado por meio das seguintes expansões por série de Taylor ( $h_3 = h_2/2 = h_1/4 = h/4$ , uma vez que  $r = 2$ )

$$u_{3,i} - u_i^{\text{analítica}} = c_{1,i} \frac{h}{4} + c_{2,i} \left(\frac{h}{4}\right)^2 + c_{3,i} \left(\frac{h}{4}\right)^3 + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.76)$$

FIGURA 18 – MALHA COM NÓS COINCIDENTES, TRÊS NÍVEIS DE MALHA E  $r = 2$ .

FONTE: O autor (2019).

$$u_{2,i} - u_i^{\text{analítica}} = c_{1,i} \frac{h}{2} + c_{2,i} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_{3,i} \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.77)$$

$$u_{1,i} - u_i^{\text{analítica}} = c_{1,i} h + c_{2,i} h^2 + c_{3,i} h^3 + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.78)$$

Para o primeiro nível de CRE, tem-se

$$u_{2,i-3}^1 - u_{i-3}^{\text{analítica}} = -c_{2,i-3} \frac{h^2}{2} - 3c_{3,i-3} \frac{h^3}{4} + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.79)$$

$$u_{2,i+1}^1 - u_{i+1}^{\text{analítica}} = -c_{2,i+1} \frac{h^2}{2} - 3c_{3,i+1} \frac{h^3}{4} + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.80)$$

Uma vez que  $c_{1,i}$  é uma função de  $u_i^{\text{analítica}}$ , ela também é contínua ou contínua por partes. Então, é possível expandir  $c_{1,i-3}$  e  $c_{1,i+1}$  como

$$c_{1,i-3} = c_{1,i-1} - c_{1,i-1}^{(1)} \frac{h}{2} + c_{1,i-1}^{(2)} \frac{h^2}{8} + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.81)$$

$$c_{1,i+1} = c_{1,i-1} + c_{1,i-1}^{(1)} \frac{h}{2} + c_{1,i-1}^{(2)} \frac{h^2}{8} + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.82)$$

usando a mesma ideia em outros termos, pode-se escrever

$$u_{2,i-1}^1 - u_{i-1}^{\text{analítica}} = -c_{2,i-1} \frac{h^2}{2} - (c_{1,i-1}^{(2)} + 12c_{3,i-1}) \frac{h^3}{16} + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.83)$$

$$u_{3,i-1}^1 - u_{i-1}^{\text{analítica}} = -c_{2,i-1} \frac{h^2}{8} - 3c_{3,i-1} \frac{h^3}{32} + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.84)$$

$$u_{3,i+1}^1 - u_{i+1}^{\text{analítica}} = -c_{2,i+1} \frac{h^2}{8} - 3c_{3,i+1} \frac{h^3}{32} + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.85)$$

$$u_{3,i}^1 - u_i^{\text{analítica}} = -c_{2,i} \frac{h^2}{8} - (c_{1,i}^{(2)} + 12c_{3,i}) \frac{h^3}{128} + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.86)$$

Agora, para o segundo nível de CRE

$$u_{3,i-1}^2 - u_{i-1}^{\text{analítica}} = (c_{1,i-1}^{(2)} + 6c_{3,i-1}) \frac{h^3}{48} + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.87)$$

$$u_{3,i+1}^2 - u_{i+1}^{\text{analítica}} = c_{3,i+1} \frac{h^3}{8} + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.88)$$

$$u_{3,i}^2 - u_i^{\text{analítica}} = c_{2,i} \frac{h^2}{4} + (c_{1,i}^{(2)} + 72c_{3,i}) \frac{h^3}{128} + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.89)$$

onde pode-se observar que a ordem de acurácia na malha 3, segundo nível de CRE e nó  $i$  é 2. Isso é um problema, pois o procedimento da CRE não conseguirá remover este termo de segunda ordem do erro após o primeiro nível.

Observa-se, ainda, que os  $C_i$  para nós não coincidentes (equação (3.75)) são aproximações de segunda ordem. Uma possível solução para o limite de ordem seria o uso de aproximações de ordens superiores para o cálculo de  $C_i$ . Porém, isso deve ser feito para cada nó não coincidente e em cada nível de CRE.

A solução mais eficiente, para se obter ordens mais altas com CRE e sua repetição, seria usar a equação (3.72) apenas nos nós coincidentes (e.g., nós  $i - 3$  e  $i + 1$  da FIGURA 18), e usar aproximações de alta ordem para outros pontos com uma interpolação polinomial adequada. Infelizmente, esta solução não é válida para uma malha sem nós coincidentes. Portanto, uma abordagem deve ser desenvolvida para aumentar a acurácia de soluções numéricas nestes tipos de malha.

### 3.6 Polinômios interpoladores e regressão

Destacam-se duas ferramentas para este estudo: interpolação polinomial por Diferenças Divididas de Newton (DDN) e regressão polinomial múltipla. A primeira possui a vantagem de não necessitar de pontos ordenados para a construção do polinômio. Sua forma geral é apresentada na equação (3.90) (6).

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1}), \quad (3.90)$$

onde  $f_n$  é o polinômio resultante da aproximação,  $x$  a posição e  $b$  os coeficientes das diferenças divididas, apresentados nas equações (3.91) a (3.93). As diferenças divididas são calculadas conforme equação (3.94) e (3.95) (6).

$$b_0 = f(x_0) \quad (3.91)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] \quad (3.92)$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] \quad (3.93)$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (3.94)$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_i - x_j} \quad (3.95)$$

Chapra e Canale (6) apresentam uma metodologia para se aplicar regressão linear múltipla, que é útil quando se possuem duas ou mais variáveis independentes. Neste trabalho será considerado que  $u$  (representando uma propriedade qualquer do escoamento) dependerá de  $x$  e  $y$  no problema bidimensional e será buscada uma regressão múltipla com base em um polinômio de grau 4. Para tal, considere a seguinte equação

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^3 + a_7y^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}x^4 + a_{11}y^4 + a_{12}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{14}x^2y^2 \quad (3.96)$$

Os coeficientes serão obtidos por meio do resíduo ao quadrado e suas derivadas em relação a cada um dos coeficientes (6), ou seja,

$$S_r = \sum_{i=1}^N [(u_i - (a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^3 + a_7y^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}x^4 + a_{11}y^4 + a_{12}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{14}x^2y^2))]^2, \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_i}, \quad i = 0, \dots, 14. \quad (3.98)$$

Ao igualar as equações da equação (3.98) a zero resultará um sistema linear, que terá como incógnitas os coeficientes da equação (3.96) (6) e este sistema pode ser resolvido por qualquer método de solução de sistemas lineares.

### 3.7 Fechamento

Nesse capítulo foram apresentados as discretizações por FD e FV explícito e implícito, o tratamento das condições de contorno, estratégias de verificação, conceitos da RE, que o uso repetido da RE possui um limite de ordem e técnicas de interpolação e regressão polinomial. Com os métodos apresentados, é possível discretizar os modelos matemáticos e resolvê-los numericamente. Com a solução dos modelos, é possível reduzir os erros numéricos com a RE e, então, verificar os resultados. As metodologias usadas na solução dos modelos matemáticos, na aplicação da RE e na verificação serão apresentadas no Capítulo 4.

## 4 METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentadas as metodologias para aplicar a CRRE em diferentes situações e a metodologia utilizada para resolver os problemas numericamente. Primeiro serão apresentados três procedimentos diferentes para a aplicação da CRRE: em soluções suaves, com onda de choque e em malhas bidimensionais. Após isso, detalhes sobre o problema da EAL, do escoamento de Rayleigh, das equações de Euler Q1D e, por fim, das equações de Euler 2D.

### 4.1 Extrapolação de Richardson completa e repetida

Uma possível tentativa para aumentar a acurácia, em malhas que não possuam nós coincidentes, seria a combinação de três nós (ou volumes) e uma correção, de maneira similar ao procedimento original da CRE. Porém, uma correção com ordem de acurácia fixa deve impor um limite de ordem no procedimento da CRRE. Outra possibilidade seria a combinação de mais de três nós (ou volumes) para alcançar ordens mais elevadas. No entanto, ordens mais elevadas exigem uma maior quantidade de nós (ou volumes) e, portanto, um maior sistema linear para ser resolvido. Destaca-se que este sistema pode não ter solução. Assim, a forma mais simples, porém, não necessariamente mais eficiente, seria o uso de repetição com polinômios interpoladores.

Considere uma malha uniforme e a equação

$$u_{g,i}^m = u_{g,i}^{m-1} + \frac{u_{g,i}^{m-1} - u_{g-1,i}^{m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}, \quad \text{com } m < g, \quad (4.1)$$

sendo  $G$  é a quantidade disponível de malhas. Note que o primeiro nível de CRE ( $m = 1$ ) depende da solução numérica  $m = 0$ .

De acordo com a equação (4.1), são necessários o nó (ou volume) da malha fina ( $g$ ) e seu equivalente na malha grossa ( $g - 1$ ), ou seja, são necessários  $u_{g,i}^{m-1}$  e  $u_{g-1,i}^{m-1}$ . A obtenção do nó (ou volume) equivalente na malha grossa pode ser feita por meio de polinômios interpoladores.

Considere um polinômio unidimensional  $p_d(x)$ , obtido por DDN, de grau  $d = l_i + r_i = p_{G-1} - 1$ , onde  $l_i$  é a quantidade de pontos à esquerda de  $i$  e  $r_i$  é a quantidade de pontos à direita de  $i$ , que satisfaz  $p_d(x_j) = u_{g-1,j}^{m-1}$  com  $j = i - l_i, \dots, i + r_i$  e  $i = 1, \dots, N$ , sendo  $N$  a quantidade de nós (ou volumes). Os valores de  $l_i$  e  $r_i$  dependem do grau do polinômio e da proximidade de  $i$  em relação aos contornos. Sugere-se o uso de  $l_i = r_i$ , quando possível, pois permite uma aproximação central.

Observa-se que o grau do polinômio deve ser, pelo menos, igual a ordem esperada do último nível de extrapolação ( $d = p_{G-1} - 1$ ). Por exemplo, caso a aproximação numérica possua ordens verdadeiras 1,2,3, ... e estejam disponíveis 10 malhas, o grau do polinômio

deverá ser  $d = p_9 - 1 = 10 - 1 = 9$ . Esta imposição deve ser atendida, pois com um grau menor os erros de ordem mais baixa, inseridos pela interpolação polinomial, não seriam removidos pela CRRE.

Com estes polinômios, é possível realizar a interpolação e obter nós (ou volumes) equivalentes na malha grossa e, então, a extrapolação pode ser calculada com a equação (4.1). Ainda, CRRE é uma aplicação recursiva de CRE e pode ser resumida conforme a TABELA 2.

TABELA 2 – EXTRAPOLAÇÕES DE  $u$ .

nível de malha ( $g$ )	nível de extrapolação ( $m$ )					
	0	1	2	3	4	
1	$u_{1,i}$	-	-	-	-	
2	$u_{2,i}$	$u_{2,i}^1$	-	-	-	
3	$u_{3,i}$	$u_{3,i}^1$	$u_{3,i}^2$	-	-	
4	$u_{4,i}$	$u_{4,i}^1$	$u_{4,i}^2$	$u_{4,i}^3$	-	
5	$u_{5,i}$	$u_{5,i}^1$	$u_{5,i}^2$	$u_{5,i}^3$	$u_{5,i}^4$	
		CRE		CRRE		

FONTE: O autor (2019).

O algoritmo para calcular a CRRE, em soluções suaves e no nível  $m$ , é apresentado na sequência. Para  $g = m + 1, \dots, G$ :

1. Obter um nó (ou volume) equivalente na malha grossa ( $u_{g-1,i}^{m-1}$ ) com um polinômio de grau  $p_{G-1} - 1$ .
2. Calcular a CRE com a equação (4.1).

O escoamento de fluido compressível está sujeito a descontinuidades e choques, que são fenômenos desafiadores em métodos numéricos. Uma das mais populares aproximações numéricas, usada para capturar choques em equações de conservação, como as equações de Euler, é a WENO. Por meio de combinações de aproximações ponderadas em diferentes subestêncas, essa aproximação consegue manter alta ordem de acurácia suficientemente longe do choque ou descontinuidade. Dito isso, propõe-se o uso da ideia da WENO com a CRE para aumentar a acurácia de soluções não suaves.

Para reduzir o erro numérico, a CRRE deve ser calculada a uma certa distância da onda de choque, pois o comportamento dos erros nesta região é não monótono. Isso será feito por meio dos indicadores de suavidade da WENO e da estimativa de erro de Richardson. Está última pode ser calculada por meio do seguinte (1)

$$U_{rig,i}^m = \frac{u_{g,i}^{m-1} - u_{g-1,i-1}^{m-1}}{r^{p_m-1} - 1}. \quad (4.2)$$

A solução será suave se

$$P = \frac{\beta_g}{\beta_f + \epsilon} \leq 2 + 2^{1+1/p_v^2}, \quad (4.3)$$

onde  $\epsilon = 1E - 16$  para evitar divisão por zero.

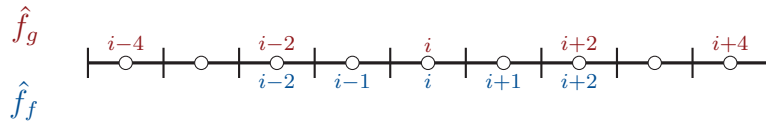
Os indicadores de suavidade  $\beta_f$  e  $\beta_g$  podem ser calculados por meio da equação (4.4), a única diferença são os estênceis utilizados para obter  $\hat{f}$  (48). Os nós  $i - 4, i - 2, i, i + 2$  e  $i + 4$  formam o estêncil de  $\hat{f}_g$  e os nós  $i - 2, i - 1, i, i + 1$  e  $i + 2$  formam o estêncil de  $\hat{f}_f$ , conforme apresentado na FIGURA 19.

$$\beta = \sum_{i=1}^4 h^{2i-1} \left( \frac{d^i \hat{f}}{dx^i} \right)^2, \quad (4.4)$$

com

$$\hat{f} = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (4.5)$$

FIGURA 19 – EXEMPLO DE ESTÊNCES PARA  $\hat{f}_g$  E  $\hat{f}_f$ .



FONTE: O autor (2019).

Mesmo com a restrição imposta pela equação (4.3), a CRRE poderia ser calculada em nós (ou volumes) com uma grande magnitude de erro. Para evitar tal situação, a CRRE será calculada em nós (ou volumes) onde a equação (4.3) é satisfeita e a estimativa de erro de Richardson é menor do que no nível anterior. Nota-se que quando  $m = 0$  não há estimativa de erro e, portanto, usa-se um valor elevado e arbitrário para  $U_{ri}^0$ .

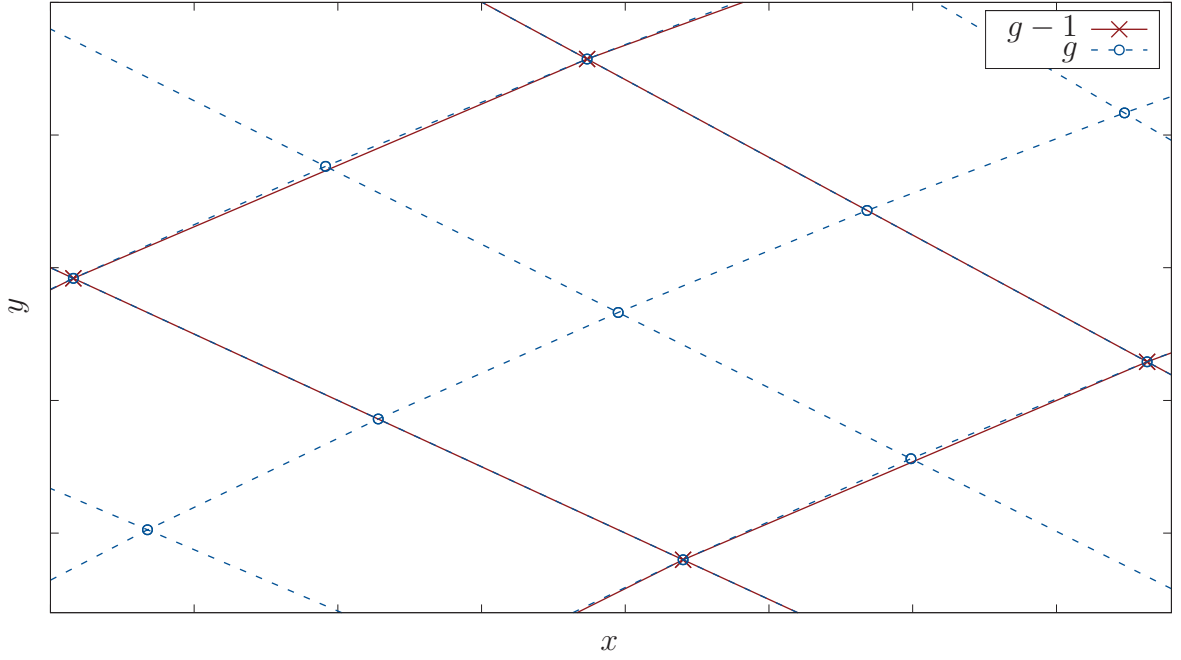
O algoritmo desenvolvido para calcular a CRRE em soluções com choques, no nível  $m$  e para  $g = G, \dots, m + 1$  está descrito na sequência.

1. Calcular  $P$  com a equação (4.3) em todos os nós (ou volumes).
2. Encontrar o início ( $b_s$ ) e o fim ( $e_s$ ) da região não suave.
3. Para  $i = 1, \dots, N$ :
  - a. Se  $i$  estiver entre  $b_s$  e  $e_s$ , usar o valor do nível anterior ( $u_{g,i}^m = u_{g,i}^{m-1}$ ) e sair do ciclo.
  - b. Obter um nó (ou volume) equivalente na malha grossa ( $u_{g-1,i}^{m-1}$ ) com um polinômio de grau  $p_{G-1} - 1$  evitando nós (ou volumes) dentro da região não suave.
  - c. Calcular a CRE com a equação (4.1).
  - d. Se  $|U_{rig,i}^m| > |U_{rig,i}^{m-1}|$ , usar o valor do nível anterior ( $u_{g,i}^m = u_{g,i}^{m-1}$ ).

Para o problema bidimensional, a CRRE será testada apenas em soluções suaves. Considere uma malha não uniforme para o FV, apresentada na FIGURA 20. Nota-se que,



FIGURA 20 – EXEMPLO DE MALHA BIDIMENSIONAL NÃO UNIFORME.



FONTE: O autor (2019).

apesar de possuir volumes coincidentes, não é possível fixar  $x$  ou  $y$  para que sejam feitas interpolações em cada uma dessas direções com polinômio de grau elevado.

É comum encontrar procedimentos para interpolação multidimensional de graus baixos. Porém, a CRRE exige polinômios de grau  $p_{G-1} - 1$ , ou seja, a ordem verdadeira relativa ao nível máximo de CRE. Com o intuito de atingir um grau de polinômio mais elevado, será usada a regressão polinomial múltipla.

Considerando o procedimento apresentado na Seção 3.6 com  $n = 50$ , será ajustado um polinômio de grau quatro com base nos 50 nós (ou volumes) mais próximos, na malha grossa, do nó (ou volume) que se deseja obter na malha fina. Após o ajuste por regressão polinomial múltipla, CRE será aplicado conforme equação (4.1). Destaca-se que este procedimento é válido apenas para soluções sem choques.

## 4.2 Equação de advecção linear

Para a solução da equação de advecção linear (EAL), foi considerada a malha uniforme da FIGURA 21, que resultou da seguinte discretização

$$x_i = x_l + h \left( i - \frac{1}{2} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

$$N = N_i 2^{g-1}, \quad g = 1, \dots, G, \quad (4.7)$$

com  $h = (x_r - x_l)/2$ , onde  $x_l = -1$  e  $x_r = 1$  são os extremos esquerdo e direito do domínio,  $G = 12$  e  $N_i = 20$  é a quantidade de nós da primeira malha.

FIGURA 21 – EXEMPLO DE MALHA UNIFORME.



FONTE: O autor (2019).

A condição inicial para a equação de advecção linear, quando resolvida por FD, foi calculada da seguinte forma

$$u(x) = \frac{1}{4} + \frac{\text{sen}(\pi x)}{2}, \quad (4.8)$$

deste modo, a solução analítica pode ser calculada como

$$u(x) = \frac{1}{4} + \frac{\text{sen}[\pi(x - t_f)]}{2}, \quad (4.9)$$

onde  $t_f = 1$  s é o tempo final.

Quando resolvida pelo FV, a condição inicial se torna

$$u(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{1}{4} + \frac{\text{sen}(\pi\phi)}{2} \right) d\phi, \quad (4.10)$$

com a seguinte solução analítica

$$u(x_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{1}{4} + \frac{\text{sen}[\pi(\phi - t_f)]}{2} \right) d\phi. \quad (4.11)$$

Para a integração no tempo, o passo de tempo foi definido como (39)

$$\Delta t = \frac{h\text{CFL}}{\lambda}, \quad (4.12)$$

onde CFL é o número de Courant–Friedrichs–Lewy e lembrando que  $\lambda = 1$  para a equação de advecção linear. Destaca-se que o CFL é arbitrário e foi usado um valor de 0,5, pois permitiu resultados estáveis em testes iniciais.

Por ser um problema simples e periódico, foram usadas as condições de contorno periódicas, que resulta

$$u_0 = u_N, \quad (4.13)$$

sendo  $u_0$  é um nó fictício, usado para facilitar a imposição da condição de contorno.

A solução numérica foi obtida ao usar o procedimento apresentado na Seção 3.1, a integração no tempo por RK foi realizada até que o  $t_f$  tivesse sido atingido.

A quantidade de níveis disponíveis para a aplicação da CRE foi  $G - 1 = 11$  para a aproximação *upwind* e  $G - 1 = 9$  para a WENO-Z. Como a solução é suave, o procedimento

para CRRE foi aquele para soluções suaves. Os erros numéricos foram avaliados pela norma  $L^1$  e sua ordem efetiva.

Com o intuito de verificar o desempenho da CRRE com aproximações de alta ordem, a equação de advecção linear também foi resolvida com a WENO-Z e FD. As únicas diferenças foram a necessidade de adicionar mais nós fictícios e o cálculo do passo de tempo. Como a solução é periódica, os nós fictícios podem ser calculados conforme o seguinte

$$\begin{aligned} u_{-2} &= u_{N-2}, & u_{-1} &= u_{N-1}, & u_0 &= u_N, \\ u_{N+1} &= u_1, & u_{N+2} &= u_2, & u_{N+3} &= u_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para que a ordem no tempo acompanhe a ordem espacial, é necessário usar um método de integração de ordem superior ou modificar o passo de tempo. Este último é mais fácil de ser feito e foi realizado da seguinte forma

$$\Delta t = \min \left( \frac{hCFL}{\lambda}, h^{5/3} \right). \quad (4.15)$$

### 4.3 Escoamento de Rayleigh

Para a solução do escoamento de Rayleigh (1D), calor foi removido do escoamento para manter a condição de escoamento supersônico. Foi considerada a malha uniforme da FIGURA 21, que resultou da discretização apresentada nas equações (4.6) e (4.7), com  $G = 10$  e  $N_i = 20$ . As condições de entrada e outros parâmetros do escoamento são apresentados na TABELA 3 e representam o escoamento do ar como um gás ideal em um duto arbitrário de seção constante.

TABELA 3 – CONDIÇÕES DE ENTRADA E PARÂMETROS DO PROBLEMA 1D.

$R [J/(kgK)]$	286,9	$M$	1,3
$\gamma$	1,4	$T [K]$	400
$q [J/kg]$	$-5 \cdot 10^4$	$p [MPa]$	0,20265
$x_l [m]$	0	$\rho [kg/m^3]$	$p/(RT)$
$x_r [m]$	0,2	$u [m/s]$	$M\sqrt{\gamma p/\rho}$

FONTE: O autor (2019).

Com os valores de  $M$ ,  $T$  e  $p$  na entrada do domínio e a quantidade de calor adicionada ao escoamento ( $q$ ), é possível calcular a solução analítica por meio do procedimento apresentado na Seção 2.3.2. Como este problema foi resolvido em regime permanente, a solução analítica foi usada como estimativa inicial e o avanço no tempo foi realizado até que o critério de convergência tivesse sido satisfeito. O passo de tempo foi obtido por meio da equação (4.12), onde  $\lambda$  é o maior dos autovalores em módulo de todo o domínio de cálculo.

O critério de convergência teve como base a variação de  $\mathbf{U}$  entre os passos de tempo. Quando esta variação atingiu o erro de máquina, o procedimento de cálculo foi executado até que a quantidade de passos fosse aproximadamente o dobro de quando o erro de máquina foi atingido.

As condições de contorno foram aplicadas com o procedimento ILW, descrito na Seção 3.3. Neste caso, o contorno esquerdo é supersônico e foi necessário informar três condições de contorno. Com a solução analítica,  $\mathbf{U}_l$  é conhecido no contorno. Como a aproximação numérica usada no interior do domínio foi de ordem um, é suficiente que a expansão por série de Taylor tenha ordem um. Deste modo,  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_l$ .

No contorno direito não é necessário impor nenhuma condição de contorno, conforme discutido na Seção 3.3. Deve-se notar que, apesar de aproximação numérica usada no interior do domínio ser de ordem um, foi necessário utilizar uma aproximação de ordem 5 para que CRRE apresentasse um bom desempenho.

A solução numérica foi obtida ao usar o procedimento apresentado na Seção 3.1 para sistemas de equações não lineares e a integração no tempo por RK foi realizada até que o critério de convergência tivesse sido satisfeito. A quantidade de níveis disponíveis para a aplicação da CRE foi  $G - 1 = 9$ . Como a solução é suave, foi utilizado o procedimento CRRE para soluções suaves. Os erros numéricos foram avaliados pela norma  $L^1$  e sua ordem efetiva.

#### 4.4 Equações de Euler quase unidimensionais

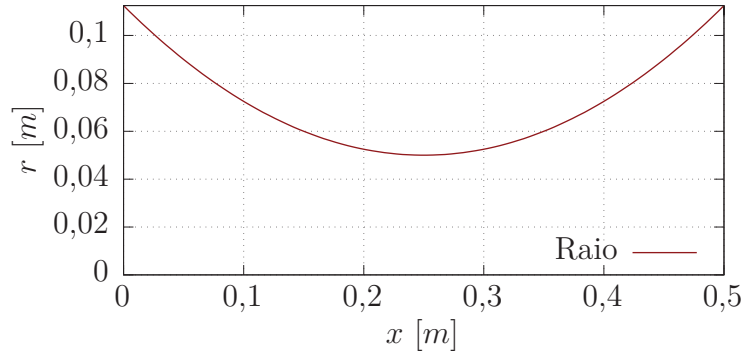
O escoamento quase unidimensional (Q1D) isentrópico foi resolvido pelo FD e FV e o escoamento com onda de choque apenas pelo FD. Para estes problemas, foi considerada a malha uniforme da FIGURA 21, que resultou da discretização apresentada nas equações (4.6) e (4.7), com  $G = 10$  e  $N_i = 20$ . A geometria do bocal convergente-divergente está representada na FIGURA 22 e sua área foi calculada a partir da equação (4.16). As condições de entrada e outros parâmetros do escoamento são apresentadas na TABELA 4. Note que a pressão na saída ( $p_{ex}$ ) é necessária apenas para o escoamento com onda de choque e que estes parâmetros representam um escoamento de ar como um gás ideal.

$$A(x) = \pi[(x - x_{th})^2 + r_{th}]^2, \quad (4.16)$$

onde  $x_{th}$  e  $r_{th}$  são a posição e o raio da garganta.

A solução exata do problema isentrópico foi obtida com base na área do bocal, os valores de  $p_0$  e  $T_0$  e o procedimento apresentado na Seção 2.3.3. Como este problema foi resolvido em regime permanente, a solução exata foi usada como estimativa inicial e o avanço no tempo foi realizado até que o critério de convergência tivesse sido satisfeito. O

FIGURA 22 – GEOMETRIA DO BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE.



FONTE: O autor (2019).

TABELA 4 – CONDIÇÕES DE ENTRADA E PARÂMETROS DO PROBLEMA Q1D.

$x_l$ [m]	0	$\gamma$	1,4
$x_r$ [m]	0,5	$p_0$ [MPa]	0,2
$x_{th}$ [m]	0,25	$T_0$ [K]	800
$r_{th}$ [m]	0,05	$\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$p_0/(RT_0)$
$R$ [J/(kgK)]	286,9	$p_{ex}$ [MPa]	0,101325

FONTE: O autor (2019).

passo de tempo foi obtido por meio da equação (4.12), com a mesma ideia do escoamento 1D.

Para o FD, o critério de convergência utilizado foi o mesmo do escoamento 1D e as condições de contorno também foram aplicadas por meio do ILW, conforme apresentado na Seção 3.3. Apesar da aproximação numérica usada no interior do domínio ter sido de ordem um, foi necessário utilizar uma aproximação de ordem 5 em ambos os contornos para que a CRRE apresentasse bom desempenho.

A solução numérica foi obtida ao usar o procedimento apresentado na Seção 3.1 para sistemas de equações não lineares. A integração no tempo por RK foi realizada até que o critério de convergência tivesse sido satisfeito. A quantidade de níveis disponíveis para a aplicação da CRE foi  $G - 1 = 9$ . Como a solução é suave, o procedimento de CRRE foi aquele para soluções suaves. Os erros numéricos foram avaliados pela norma  $L^1$  e sua ordem efetiva.

Para o FV, o critério de convergência é semelhante ao apresentado para o FD. A diferença é que serão acompanhadas as variações de  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  e  $u$ .

No contorno esquerdo, a pressão foi imposta e a velocidade extrapolada. Para isto, o valor da pressão no volume fictício foi calculado com base na solução analítica e foi usada interpolação de grau cinco para obter o valor da velocidade no volume fictício. Destaca-se que a pressão no contorno possui um valor constante para todas as iterações, deste modo,

$p'_0 = 0$ . A temperatura foi calculada com base na entalpia total e na velocidade e a massa específica com base na temperatura e na pressão.

No contorno direito, a correção da pressão e a velocidade foram extrapoladas. Para isso, foram usadas interpolações de grau cinco para obter os valores da velocidade e correção da pressão no volume fictício. Temperatura e massa específica foram obtidas da mesma forma que para o contorno esquerdo.

As velocidades nos contornos, necessárias para realizar os cálculos, foram obtidas com um polinômio de grau cinco.

Com as aproximações apresentadas na Seção 3.2 para FV implícito, a discretização das equações quase unidimensionais de Euler podem ser escritas na forma

$$a_{i,1}^\phi \phi_{i-1} + a_{i,2}^\phi \phi_i + a_{i,3}^\phi \phi_{i+1} = b_i^\phi, \quad (4.17)$$

onde  $\phi$  representa a velocidade  $u$  ou a correção da pressão  $p'$ ,  $a$  são os coeficientes do sistema linear e  $b$  os termos fontes.

Os coeficientes e termos fontes para  $u$ , decorrentes das aproximações utilizadas e condições de contorno, são apresentados nas equações (4.18) e (4.19) para os volumes fictícios à esquerda e à direita e volumes reais, respectivamente.

$$\begin{aligned} a_{i,1}^u &= a_{i,3}^u = 0, \\ a_{i,2}^u &= 1, \\ b_i^u &= u_{\text{fic}}, \quad i = 0 \text{ ou } i = N + 1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $u_{\text{fic}}$  é calculado com base em  $u$  nos volumes reais mais próximos ao fictício por um polinômio de grau cinco.

$$\begin{aligned} a_{i,1}^u &= \rho_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}} A_{i-\frac{1}{2}}, \\ a_{i,3}^u &= 0, \\ a_{i,2}^u &= \frac{\rho_i^0 A_i h}{\Delta t} - (a_{i-1} + a_{i+1}), \\ b_i^u &= \frac{\rho_i^0 A_i h u_i^0}{\Delta t} + A_i \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Note que, nestas últimas equações,  $A$  representa a área do bocal. Agora, os coeficientes e termos fontes para  $p'$  são apresentados nas equações (4.20) a (4.22).

$$\begin{aligned} a_{0,1}^p &= a_{0,3}^p = 0 \\ a_{0,2}^p &= 1 \\ b_0^p &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
a_{i,1}^p &= -\rho_{i-\frac{1}{2}} d_{i-\frac{1}{2}} A_{i-\frac{1}{2}} - \frac{u_{i-\frac{1}{2}} A_{i-\frac{1}{2}}}{RT_{i-1}}, \\
a_{i,3}^p &= -\rho_{i+\frac{1}{2}} d_{i+\frac{1}{2}} A_{i+\frac{1}{2}}, \\
a_{i,2}^p &= \frac{\frac{A_i h}{\Delta t} + u_{i+\frac{1}{2}} + A_{i+\frac{1}{2}}}{RT_i} + \rho_{i-\frac{1}{2}} d_{i-\frac{1}{2}} A_{i-\frac{1}{2}} + \rho_{i+\frac{1}{2}} d_{i+\frac{1}{2}} A_{i+\frac{1}{2}}, \\
b_i^p &= - \left( \frac{A_i h (\rho_i - \rho_i^0)}{\Delta t} + \rho_i u_{i+\frac{1}{2}} A_{i+\frac{1}{2}} - \rho_{i-1} u_{i-\frac{1}{2}} A_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad i = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
a_{N+1,1}^p &= a_{N+1,3}^p = 0, \\
a_{N+1}^p &= 1, \\
b_{N+1}^p &= p'_{\text{fic}},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde  $p'_{\text{fic}}$  é calculado com base em  $p'$  nos volumes reais mais próximos ao fictício por um polinômio de grau cinco.

Os coeficientes do método SIMPLEC para os volumes fictícios e os contornos do domínio podem ser calculados por meio do seguinte

$$d_0 = d_{N+1} = 0, \tag{4.23}$$

$$d_{1/2} = d_1, \quad d_{N+1/2} = d_{N-1}. \tag{4.24}$$

Os sistemas lineares, formados pelos coeficientes e termos fontes da velocidade e da pressão, foram resolvidos pelo método TDMA até que o critério de convergência tivesse sido atingido.

O problema Q1D com onda de choque normal possui poucas características diferentes do problema isentrópico. A primeira diferença está na forma de cálculo da solução exata, pois o problema com choque precisa do valor da pressão na saída (TABELA 4), para o cálculo da área crítica à jusante do choque. Com esta última, pressão e massa específica totais à jusante do choque, é possível calcular a solução exata do escoamento com choque, que foi utilizada como estimativa inicial.

O critério de convergência é o mesmo do problema isentrópico, resolvido por FD, e as condições de contorno são tratadas conforme apresentado na Seção 3.3. Porém, ao invés de utilizar a extrapolação do tipo WENO, foi utilizado um polinômio de ordem baixa para as primeiras duas malhas e ordem 5 para as demais. Isto foi realizado, pois em testes preliminares a CRRE apresentou limite de ordem, quando foi usada a extrapolação do tipo WENO. A ordem foi reduzida para as primeiras duas malhas, pois o choque estava causando oscilações nas proximidades do contorno.

O problema da onda de choque também foi resolvido com a aproximação WENO-Z, com o intuito de comparar esta última com a CRRE. Para a WENO-Z, a diferença está na

necessidade de nós fictícios adicionais e no passo de tempo, conforme discussão da Seção 4.2. A expansão por série de Taylor é a mesma para os fictícios adicionais, o que muda é a posição do nó fictício. Neste caso, foi utilizada a extrapolação do tipo WENO (55).

Para o problema Q1D, a quantidade de níveis de CRE foi  $G - 1 = 9$ . Nos problemas com solução isentrópica, o procedimento de CRRE para soluções suaves foi aplicado e foram calculadas a norma  $L^1$  e sua ordem efetiva. Nos problemas com onda de choque normal foi aplicado o procedimento de CRRE para soluções com choque, apenas para a aproximação *upwind*. A norma  $L^1$  e sua ordem efetiva foram calculadas para a região suave. O procedimento para determinar esta região é aquele apresentado no algoritmo da Seção 4.1. Também foram calculadas a norma  $L^1$  e sua ordem efetiva na região à montante da onda de choque.

#### 4.5 Equações de Euler bidimensionais

As equações de Euler bidimensionais (E2D) servem de modelo para o escoamento externo em perfis e o escoamento simplificado. Primeiro, serão fornecidos detalhes sobre a metodologia usada para obter as soluções numéricas do escoamento externo, que foi resolvido pelo FV implícito. Então, serão fornecidos detalhes da obtenção das soluções numéricas do escoamento simplificado, que foi resolvido pelo FD.

No escoamento externo, a discretização da malha e a solução analítica estão atreladas. Seguindo o procedimento apresentado por Bertoldo e Marchi (58), as posições  $z$  e  $\mathbf{r}$  podem ser obtidas por meio das seguintes relações

$$z = 2\varrho \cos(\varphi), \quad \mathbf{r} = \varrho \sin(\varphi), \quad (4.25)$$

onde

$$\varphi = \frac{\pi(2 + \xi)}{2N_\xi}, \quad \varrho = \frac{1 + 3\eta}{2N_\eta}, \quad (4.26)$$

sendo  $N_\xi$  e  $N_\eta$  as quantidade de volumes em cada direção e  $\xi$  e  $\eta$  são as direções coordenadas da malha transformada.

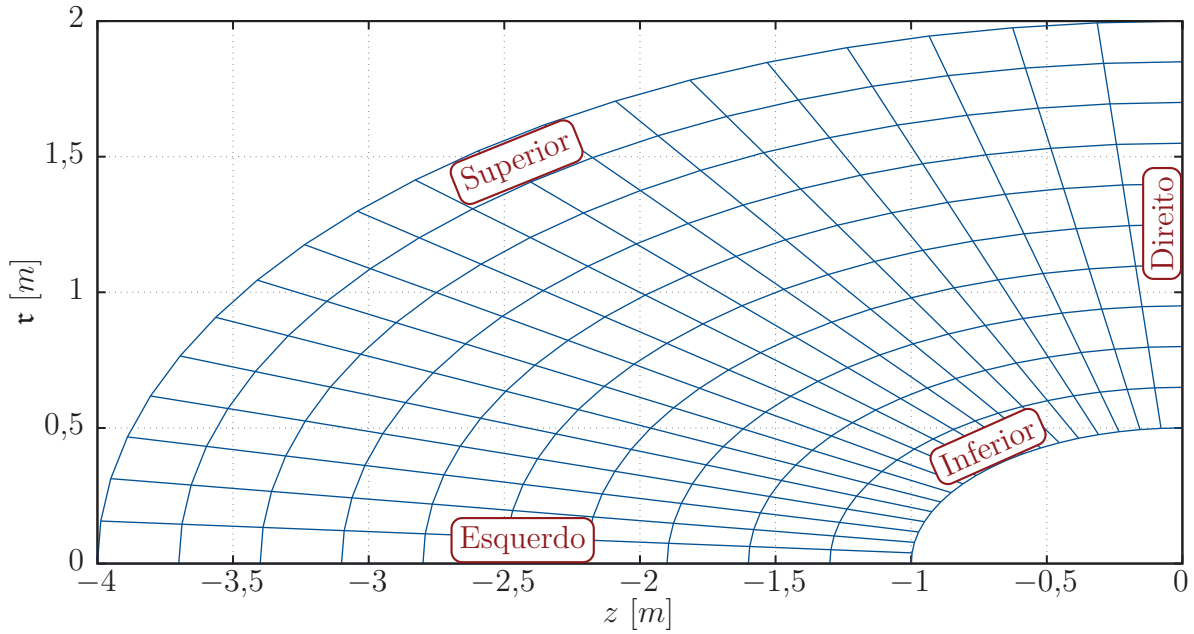
Destaca-se que, apesar da malha física não ser uniforme, o processo de transformação de coordenadas irá gerar uma malha computacional uniforme. A malha física inicial é apresentada na FIGURA 23 e possui  $N_\xi = 20$  e  $N_\eta = 10$ . Nesta última figura também é possível observar a disposição dos contornos. Para este problema, foram construídas 8 malhas com razão de refino 2 em ambas as direções.

As soluções analíticas das propriedades do escoamento, propostas por meio do método das soluções fabricadas são (58)

$$\rho(z, \mathbf{r}) = \rho_\infty \left\{ 1 + \frac{1}{20} [\sin(\pi z/4) + \cos(\pi \mathbf{r}/4)] \right\}, \quad (4.27)$$



FIGURA 23 – GEOMETRIA E MALHA INICIAL DO PROBLEMA 2D E RESOLVIDO POR FV.



FONTE: O autor (2019).

$$T(z, \mathbf{r}) = T_{\infty} \left( 1 + \frac{u_{\infty}^2 - u^2 - v^2}{2c_p T_{\infty}} \right), \quad (4.28)$$

$$u(z, \mathbf{r}) = -\frac{\rho_{\infty} u_{\infty}}{\rho r} \frac{\partial(rg(z, \mathbf{r}))}{\partial r}, \quad (4.29)$$

$$v(z, \mathbf{r}) = \frac{\rho_{\infty} u_{\infty}}{\rho} \frac{\partial(rg(z, \mathbf{r}))}{\partial z}, \quad (4.30)$$

$$g(z, \mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{20} [-\sin(\pi z/4) + \cos(\pi \mathbf{r}/4)] \right\}. \quad (4.31)$$

Nestas últimas equações, o subscrito  $\infty$  representa a propriedade na corrente-livre. A pressão pode ser obtida por meio da equação de estado e os parâmetros deste escoamento são apresentados na TABELA 5. Note que a condição inicial usada foi a solução analítica e os parâmetros escolhidos representam o escoamento de ar como gás ideal.

Segundo Bertoldo (47), as condições de contorno para os contornos superior, inferior, esquerdo e direito são, respectivamente,

$$u = u_{\infty}, \quad v = 0, \quad p = p_{\infty}, \quad T = T_{\infty}, \quad \rho = \frac{p_{\infty}}{RT_{\infty}}, \quad (4.32)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)T = 0, \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)p = 0, \quad (4.33)$$

TABELA 5 – PARÂMETROS DO PROBLEMA E2D E ESCOAMENTO EXTERNO.

$\rho_\infty [kg/m^3]$	1
$T_\infty [K]$	300
$R [J/(kgK)]$	$2,8700669E + 02$
$c_p [J/(kgK)]$	$1,0044040E + 03$
$u_\infty [m/s]$	$6,9440203E + 02$

FONTE: O autor (2019).

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) = 0, \quad v = 0, \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)T = 0, \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)p = 0, \quad (4.34)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi = \text{cte}, \quad \phi \in \{u, v, T, p\}, \quad (4.35)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é um vetor unitário e normal ao contorno.

Destaca-se que é necessário inserir termos fontes nas condições de contorno e no modelo discretizado, que são decorrentes do método das soluções fabricadas (58). Mais detalhes sobre a discretização, coeficientes e termos fontes podem ser encontrados em (47, 58). Os sistemas de equações resultantes da discretização foram resolvidos pelo método MSI até que o critério de convergência tivesse sido atingido. Este último tem como base o resíduo do sistema linear da correção de pressão (equação (4.36)), e o processo iterativo foi realizado até que o número de iterações atingisse o dobro da quantidade de iterações necessárias para o erro de máquina (47).

$$R_{L_1}^{p'} = \sum_{i=1}^{N_\xi N_\eta} \left| a_{i,3}^p p'_i + \sum_{nb} a_{i,nb}^p p'_{nb} - b_i^p \right|, \quad nb \in \{1, 2, 4, 5\}, \quad (4.36)$$

onde o subscrito nb representa os volumes vizinhos.

A quantidade de níveis disponíveis para a aplicação da CRE foi  $G - 1 = 7$ . Como a solução é suave, foi utilizado o procedimento de regressão polinomial múltipla, apresentado na Seção 3.6, em conjunto com a CRRE para soluções suaves. Os erros numéricos foram avaliados pela norma  $L^1$  e sua ordem efetiva.

O escoamento 2D simplificado foi resolvido pelo FD, conforme procedimento apresentado na Seção 3.1. Para este problema, foi utilizada a malha uniforme da FIGURA 21, que resultou da discretização apresentada nas equações (4.6) e (4.7) para a direção  $x$  e, também, para direção  $y$  com  $G = 8$  e  $N_i = 20$ . Outros parâmetros deste problema são apresentados na TABELA 6, onde  $t_f$  é o tempo final e  $y_b$  e  $y_u$  são as posições dos contornos inferior e superior.

A condição inicial utilizada foi

$$\rho(x, y) = 1 + \sin(2\pi x) \cos(2\pi y), \quad u = v = p = 1, \quad (4.37)$$

TABELA 6 – PARÂMETROS DO PROBLEMA SIMPLIFICADO.

$y_u$ [m]	1	$t_f$ [s]	1
$y_b$ [m]	0	$\gamma$	1,4
$x_l$ [m]	0	CFL	0,5
$x_r$ [m]	1		

FONTE: O autor (2019).

que gera a seguinte solução analítica

$$\rho(x,y) = 1 + \sin[2\pi(x - t_f)] \cos(2\pi(y - t_f)), \quad u = v = p = 1. \quad (4.38)$$

O passo de tempo foi calculado com base na equação (4.12). Porém, neste caso  $\lambda$  é o maior dos autovalores em módulo das duas direções e de todo o domínio de cálculo. O critério de convergência foi o tempo final, uma vez que este problema foi resolvido em regime transiente.

As condições de contorno foram aplicadas por meio das condições de contorno periódicas, conforme as seguintes equações:

$$\mathbf{U}_{0,j} = \mathbf{U}_{N,j}, \quad \mathbf{U}_{N+1,j} = \mathbf{U}_{1,j}, \quad j = 1 \dots N, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{U}_{i,0} = \mathbf{U}_{i,N}, \quad \mathbf{U}_{i,N+1} = \mathbf{U}_{i,1}, \quad i = 1 \dots N. \quad (4.40)$$

Após obter a solução numérica,  $G - 1 = 7$  níveis foram utilizados para aplicar CRRE. Como a solução é suave, foi utilizado o procedimento de regressão polinomial múltipla, apresentado na Seção 3.6, em conjunto com a CRRE para soluções suaves. Os erros numéricos foram avaliados pela norma  $L^1$  e sua ordem efetiva.

## 4.6 Fechamento

Nesse capítulo foi apresentada a proposta da CRRE para malhas sem nós (ou volumes) coincidentes em soluções suaves e em soluções com choque. A partir da discretização da EAL e equações de Euler 1D, Q1D e 2D, foi possível aplicar a CRRE e realizar a verificação. Os resultados para a solução dessas equações, da aplicação da CRRE e da verificação serão apresentados no Capítulo 5.

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados para a aplicação da CRRE nos problemas e métodos numéricos discutidos. O procedimento de aplicação da CRRE varia de acordo com o tipo de malha, solução e, até mesmo, método numérico. Todos os resultados foram obtidos com precisão quádrupla, com exceção dos problemas bidimensionais. A ordem de apresentação dos resultados é: a EAL, escoamento de Rayleigh e as equações de Euler Q1D e 2D.

### 5.1 Equação de advecção linear

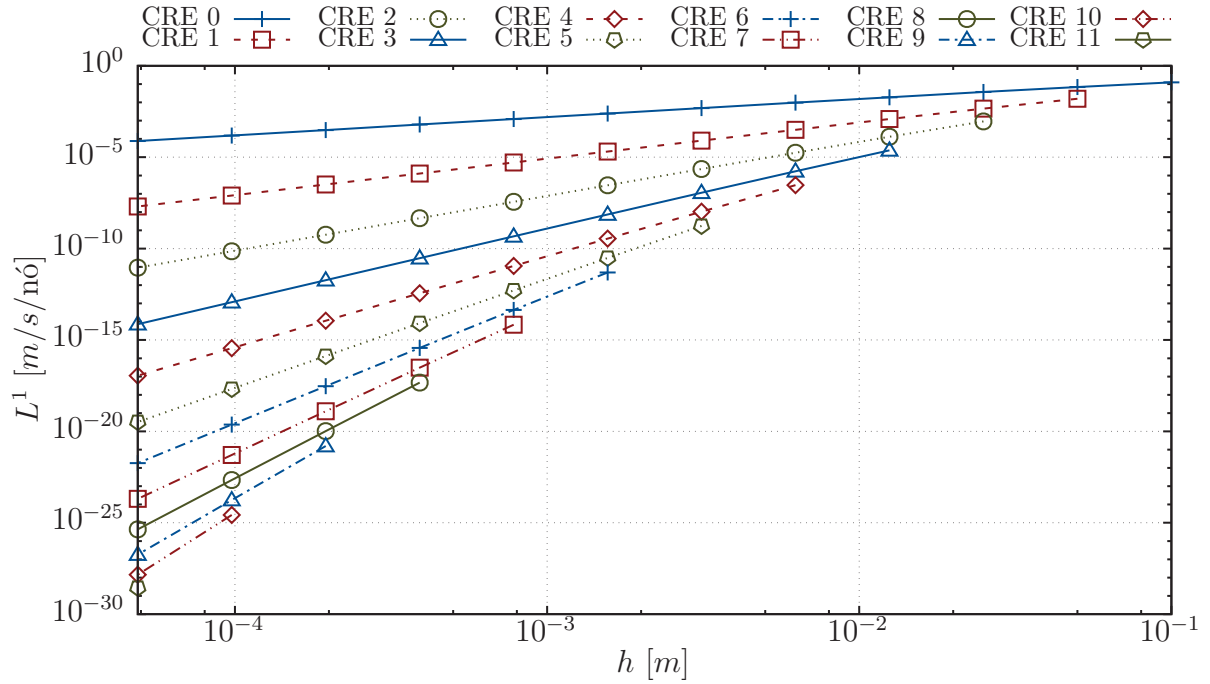
Para o problema da EAL, serão apresentados os comportamentos da norma  $L^1$  e de sua ordem. Nota-se, para a EAL com FD e *upwind*, um excelente desempenho da CRRE com aumento significativo da ordem de acurácia em todo o campo de solução e redução de erro próximo ao limite da precisão de cálculo. O erro foi reduzido por um fator de  $2,82E + 24$  e a ordem foi aumentada de 1 para 10,9 na malha mais fina, conforme apresentado na TABELA 7 e nas FIGURAS 24 e 25.

TABELA 7 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO *UPWIND*.

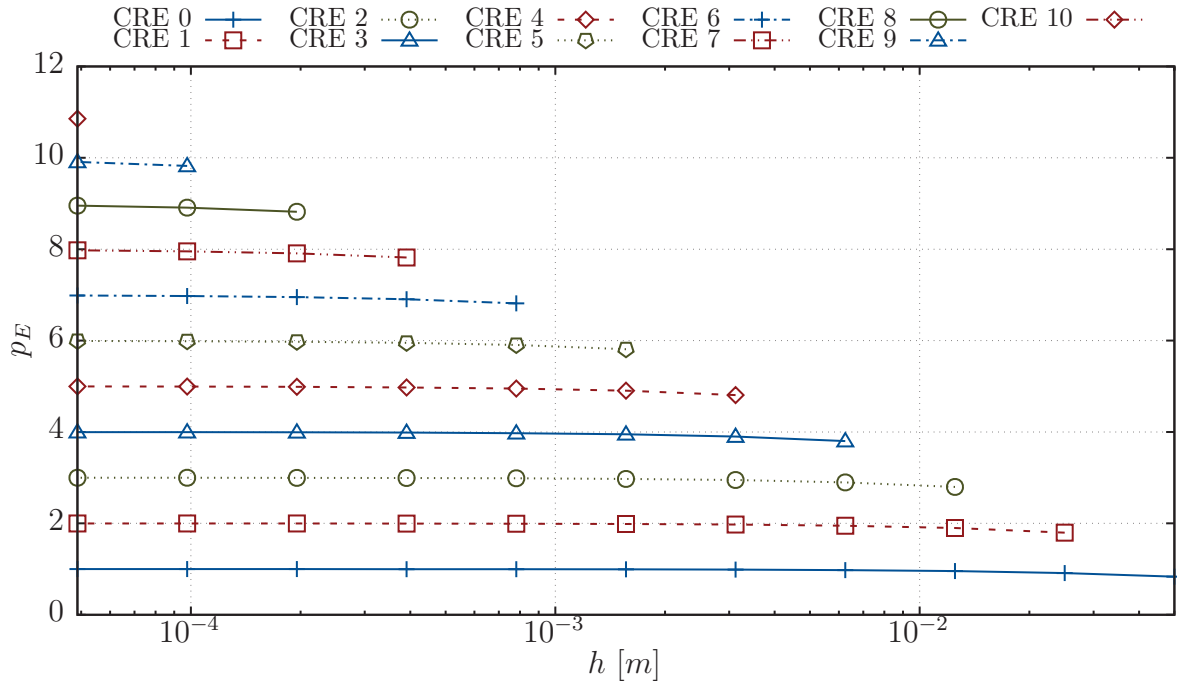
N	$h$ [m]	Norma $L^1$ [m/s/nó]		Ordem	
		<i>upwind</i>	CRRE	<i>upwind</i>	CRRE
20	1,00000E-01	1,24051E-01	-	-	-
40	5,00000E-02	6,95819E-02	1,58748E-02	8,34152E-01	-
80	2,50000E-02	3,69395E-02	9,10808E-04	9,13548E-01	1,79661E+00
160	1,25000E-02	1,90409E-02	2,38874E-05	9,56065E-01	2,79763E+00
320	6,25000E-03	9,66752E-03	2,94295E-07	9,77882E-01	3,80274E+00
640	3,12500E-03	4,87107E-03	1,73401E-09	9,88907E-01	4,80834E+00
1280	1,56250E-03	2,44493E-03	4,95048E-12	9,94446E-01	5,81280E+00
2560	7,81250E-04	1,22482E-03	6,89717E-15	9,97221E-01	6,81633E+00
5120	3,90625E-04	6,13001E-04	4,71042E-18	9,98610E-01	7,81906E+00
10240	1,95312E-04	3,06648E-04	1,58734E-21	9,99305E-01	8,82038E+00
20480	9,76563E-05	1,53361E-04	2,67045E-25	9,99652E-01	9,82388E+00
40960	4,88281E-05	7,66898E-05	2,71612E-29	9,99826E-01	1,08551E+01

FONTE: O autor (2019).

Para a aproximação WENO-Z, observa-se, na TABELA 8 e FIGURAS 26 e 27, que foi possível apenas um aumento de cinco para seis e um aumento parcial da ordem de seis para sete. Este comportamento não está relacionado com o fato de a aproximação ser de alta ordem, pois em testes preliminares foram analisadas aproximações com estênceis fixos de ordem dois a cinco. Nestes testes, observou-se que os limites de ordem começaram a partir da ordem quatro. Lembrando que o método de integração no tempo possui ordem três, acredita-se que o limite de ordem possa estar relacionado com a ordem do método de integração. Entretanto, o foco deste trabalho não é investigar o uso de CRRE com diferentes aproximações e, por isso, mais estudos não foram realizados.

FIGURA 24 – COMPORTAMENTO DA NORMA  $L^1$  PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO *UPWIND*.

FONTE: O autor (2019).

FIGURA 25 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA  $L^1$  PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO *UPWIND*.

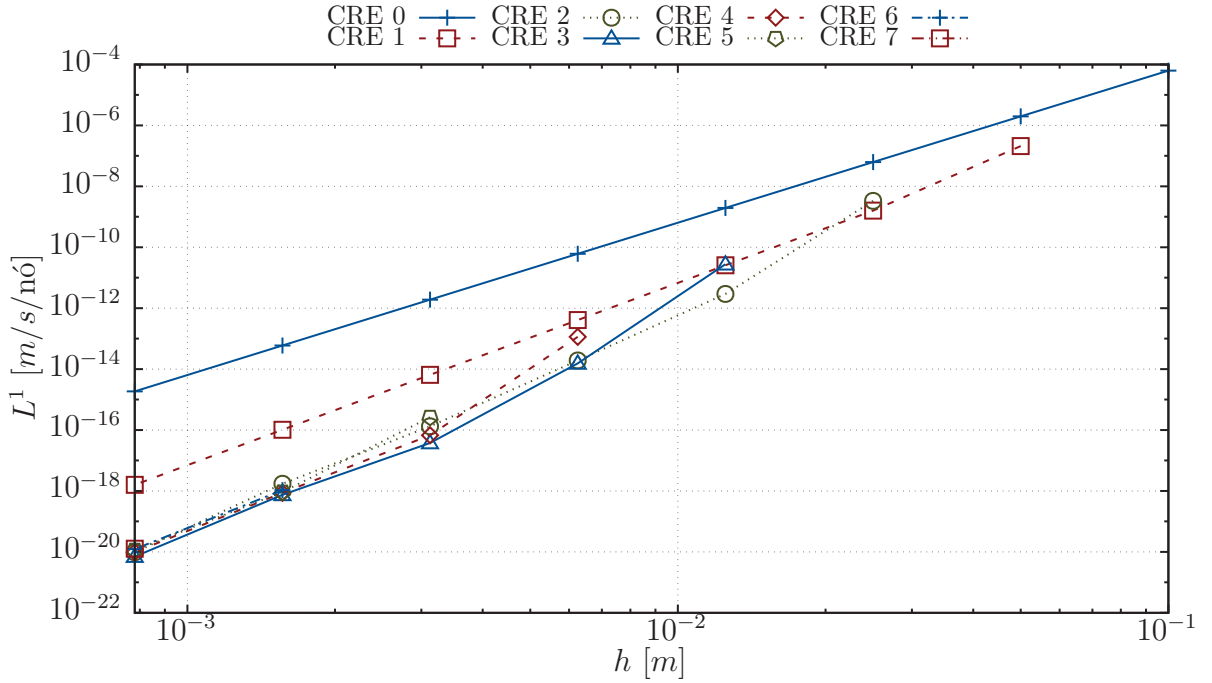
FONTE: O autor (2019).

Além da aplicação da CRRE na solução da EAL com a aproximação WENO-Z, destaca-se que a magnitude da ordem do erro para a solução da EAL com a aproximação *upwind* está na mesma ordem da solução da EAL com a WENO-Z para a malha de 2560

TABELA 8 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO WENO-Z.

N	$h$ [m]	Norma $L^1$ [m/s/nó]		Ordem	
		WENO-Z	CRRE	WENO-Z	CRRE
20	1,00000E-01	6,28863E-05	-	-	-
40	5,00000E-02	1,98881E-06	2,10626E-07	4,98277E+00	-
80	2,50000E-02	6,23543E-08	3,34780E-09	4,99527E+00	7,04658E+00
160	1,25000E-02	1,95021E-09	2,77921E-11	4,99879E+00	1,01539E+01
320	6,25000E-03	6,09564E-11	1,14644E-13	4,99971E+00	1,08124E+01
640	3,12500E-03	1,90501E-12	2,63659E-16	4,99991E+00	1,07357E+01
1280	1,56250E-03	5,95322E-14	1,06465E-18	4,99998E+00	8,15385E+00
2560	7,81250E-04	1,86039E-15	1,27668E-20	4,99999E+00	6,43291E+00

FONTE: O autor (2019).

FIGURA 26 – COMPORTAMENTO DA NORMA  $L^1$  PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO WENO-Z.

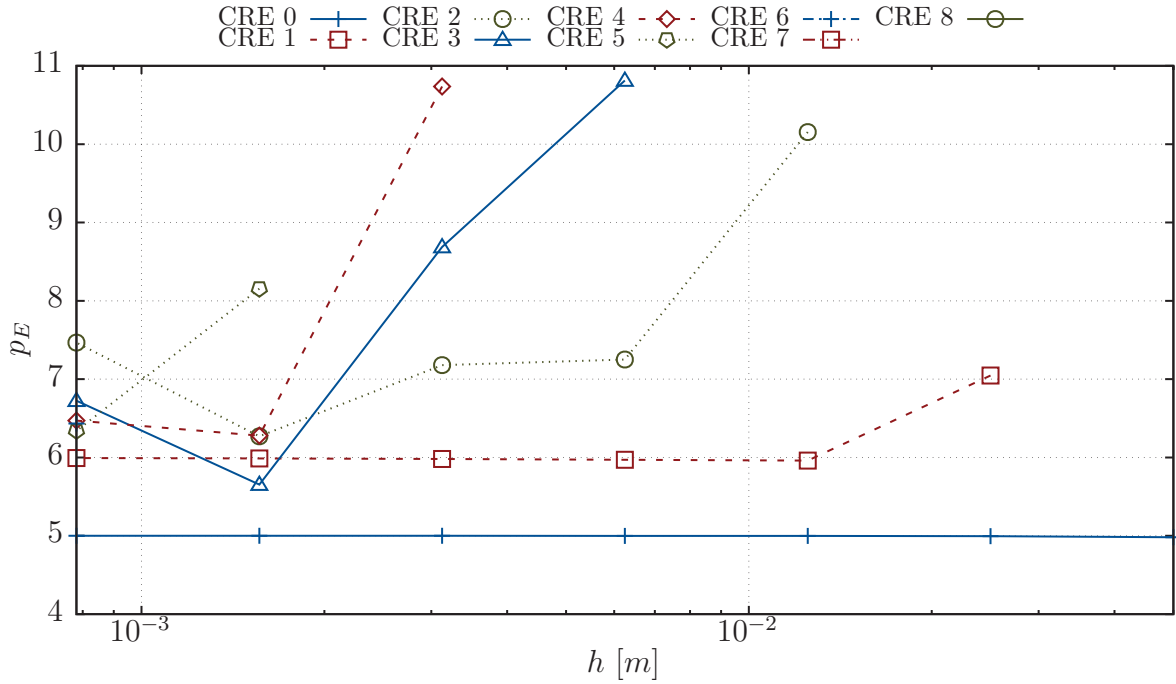
FONTE: O autor (2019).

e a ordem de acurácia é superior para a EAL com a *upwind*, conforme apresentado nas TABELAS 7 e 8.

Como o FV explícito trabalha com médias nos volumes, o procedimento de CRRE aplicado foi um pouco diferente do apresentado na Seção 4.1 e será apresentado apenas aqui, pois foi usado apenas nesta situação. Primeiro, calcula-se a estimativa de erro de Richardson para os volumes da malha grossa por meio do seguinte

$$U_{rig-1,i}^m = \frac{(u_{g,2i}^{m-1} + u_{g,2i-1}^{m-1})/2 - u_{g-1,i}^{m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}. \quad (5.1)$$

Após obter a estimativa de erro de Richardson na malha grossa, ela deve ser interpolada para as posições da malha fina. Para tal, usa-se um polinômio de grau  $p_{G-1} - 1$

FIGURA 27 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA  $L^1$  PARA A EAL, FD E APROXIMAÇÃO WENO-Z.

FONTE: O autor (2019).

obtido por DDN. Então, a CRE pode ser calculada da seguinte maneira

$$u_{g,i}^m = u_{g,i}^{m-1} + U_{rig,i}^m. \quad (5.2)$$

O resultado da aplicação de CRRE para este problema e FV não será apresentado, pois é qualitativamente semelhante ao FD com aproximação *upwind*. Ainda, ao final da aplicação da CRRE, a solução extrapolada também é uma média nos volumes do campo de solução.

Destaca-se que este problema foi resolvido em regime transiente. Apesar de Richards (31) propor uma modificação para a CRE em problemas transientes, neste estudo não foi verificada nenhuma necessidade de modificar o procedimento.

## 5.2 Escoamento de Rayleigh

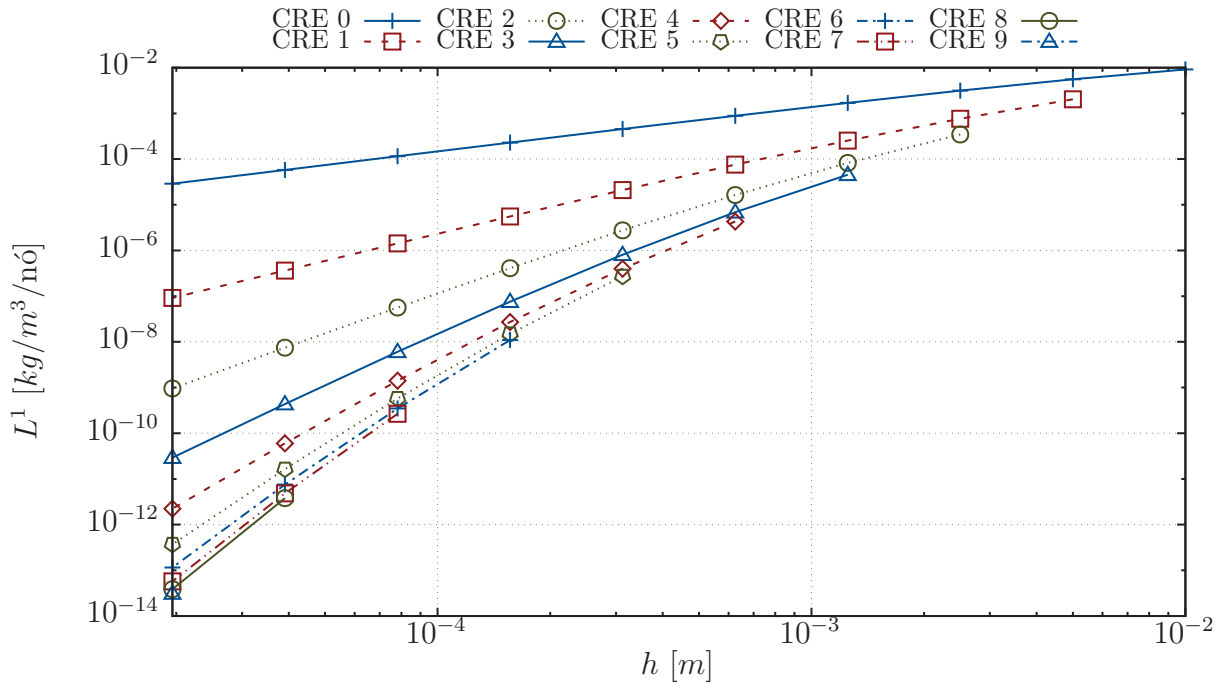
Para o escoamento de Rayleigh, são apresentados os comportamentos da norma  $L^1$  e de sua ordem na TABELA 9 e nas FIGURAS 28 e 29 para a massa específica. Esse e os próximos problemas possuem mais de um campo de solução e apenas será apresentado o campo de soluções da massa específica, pois os comportamentos das outras variáveis são qualitativamente semelhantes.

O escoamento de Rayleigh apresenta o procedimento da CRRE aplicado a um problema com fluido compressível e em regime permanente. Nota-se nos resultados (TABELA

TABELA 9 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO DE RAYLEIGH.

N	$h$ [m]	Norma $L^1$ [ $kg/m^3/nó$ ]		Ordem	
		<i>upwind</i>	CRRE	<i>upwind</i>	CRRE
20	1,00000E-02	9,15550E-03	-	-	-
40	5,00000E-03	5,56796E-03	2,02819E-03	7,17489E-01	-
80	2,50000E-03	3,15553E-03	3,44627E-04	8,19265E-01	1,40584E+00
160	1,25000E-03	1,70114E-03	4,54261E-05	8,91379E-01	2,05694E+00
320	6,25000E-04	8,87375E-04	4,30990E-06	9,38890E-01	2,72312E+00
640	3,12500E-04	4,53893E-04	2,73185E-07	9,67192E-01	3,43203E+00
1280	1,56250E-04	2,29647E-04	1,09518E-08	9,82932E-01	4,18214E+00
2560	7,81250E-05	1,15519E-04	2,66100E-10	9,91285E-01	4,96940E+00
5120	3,90625E-05	5,79363E-05	3,79866E-12	9,95595E-01	5,78582E+00
10240	1,95312E-05	2,90127E-05	3,11421E-14	9,97785E-01	6,62447E+00

FONTE: O autor (2019).

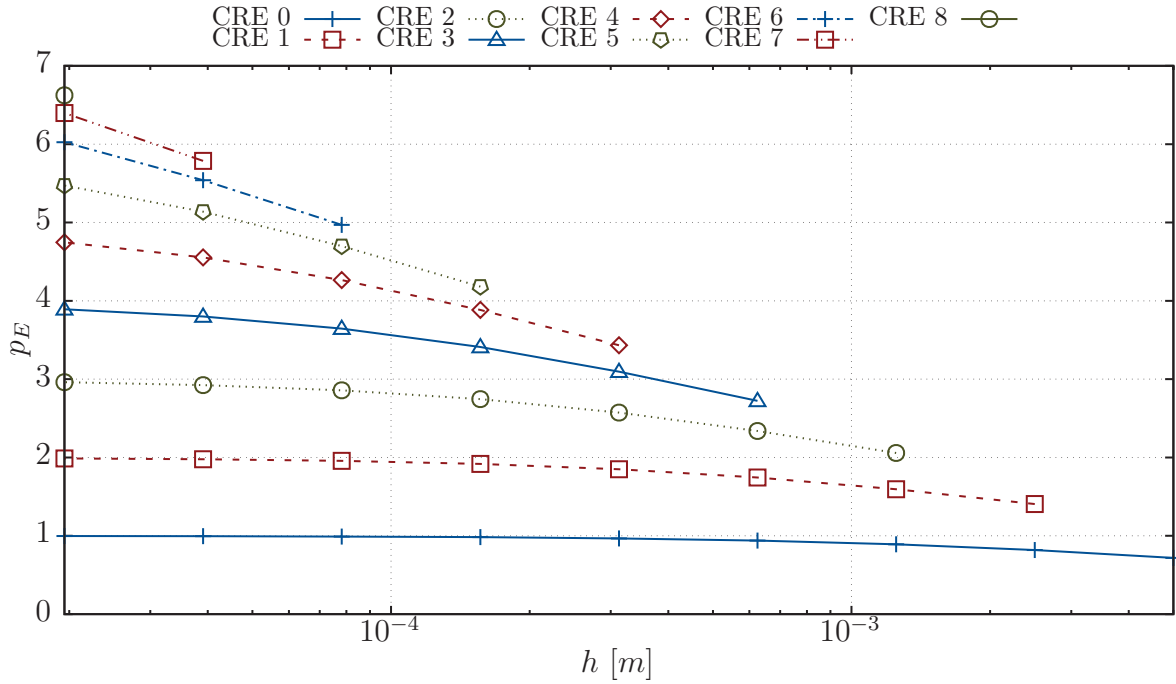
FIGURA 28 – COMPORTAMENTO DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO DE RAYLEIGH.

FONTE: O autor (2019).

9 e FIGURAS 28 e 29) um excelente desempenho da CRRE. O erro foi reduzido por um fator de  $9,32E + 08$  e a ordem foi aumentada de 0,998 para 6,62 na malha mais fina.

Destaca-se novamente que a série de Taylor usada para aplicar as condições de contorno, no contorno esquerdo, tinha ordem um. Isto é condizente com a aproximação *upwind* e o procedimento ILW. Entretanto, a série de Taylor e o polinômio usados no contorno direito tinham ordem cinco, o que não condiz com a ordem da aproximação *upwind*. Esta ordem foi utilizada porque com ordem um a CRRE apresentou limite de ordem e não foi possível obter uma redução significativa do erro. Suspeita-se que a aplicação da condição de contorno possa ter modificado as componentes do erro nas proximidades do



FIGURA 29 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO DE RAYLEIGH.

FONTE: O autor (2019).

contorno. Devido à diferença entre as componentes próximas ao contorno e mais interiores ao domínio, a CRRE pode não ter conseguido eliminar algumas componentes do erro. Isto não é observado na aplicação de polinômios com ordens mais elevadas pois apenas as componentes de ordens mais elevadas podem ter sido modificadas. De qualquer forma, uma investigação mais precisa é necessária para confirmar a suspeita ou evidenciar a causa do limite da ordem com a CRRE.

### 5.3 Escoamento isentrópico

Para o FV explícito, os comportamentos da norma  $L^1$  e de sua ordem são apresentados na TABELA 10 e nas FIGURAS 30 e 31 para a massa específica.

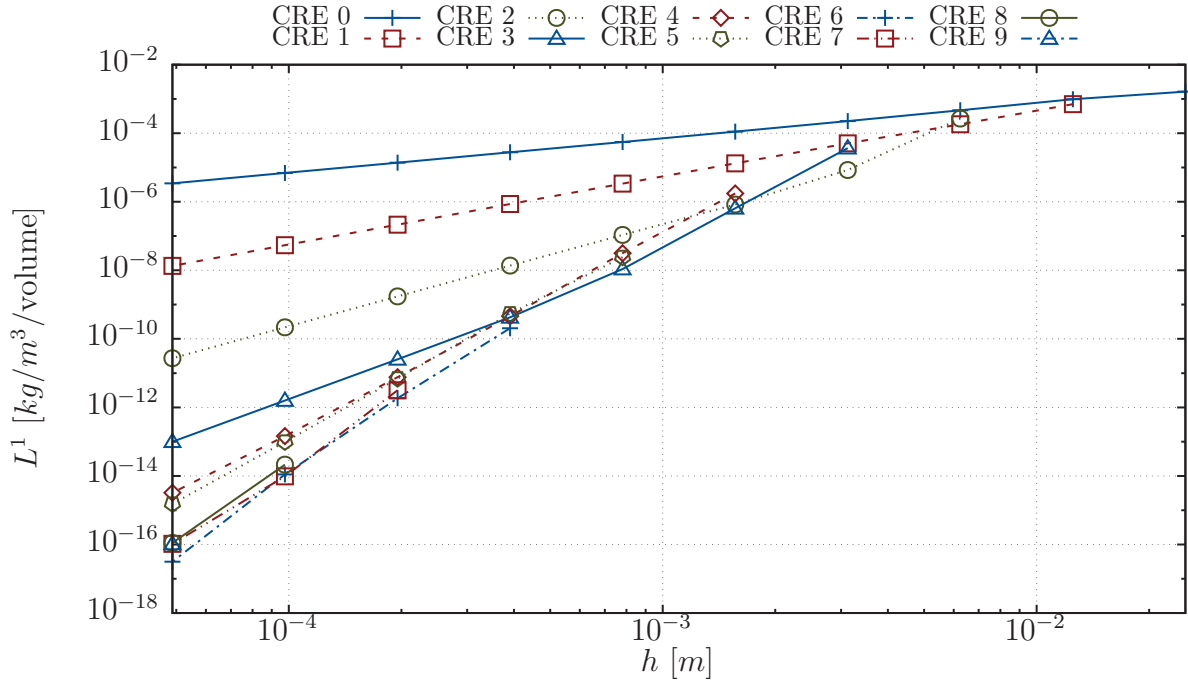
O problema da Q1D com FV implícito foi o que possibilitou identificar o limite de ordem causado pela aplicação das condições de contorno. Ao remover os volumes próximos aos contornos e aplicar a CRRE, foi possível um grande aumento da ordem de acurácia da solução. Várias modificações foram feitas na discretização para tentar corrigir o limite de ordem, onde a mais bem sucedida foi a apresentada. Observa-se aumento de erro em algumas malhas e níveis de CRE e que a ordem não possui o comportamento esperado. Mesmo assim, foi possível reduzir o erro por um fator de  $3,35E + 10$  e aumentar a ordem de 1 para 7,57, na malha mais fina e último nível de CRE.

Para o FD, primeiro será apresentado o resultado para a solução da massa específica

TABELA 10 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FV.

N	$h$ [m]	Norma $L^1$ [ $kg/m^3/volume$ ]		Ordem	
		<i>upwind</i>	CRRE	<i>upwind</i>	CRRE
20	2,50000E-02	1,64485E-03	-	-	-
40	1,25000E-02	9,81941E-04	7,07229E-04	7,44252E-01	-
80	6,25000E-03	4,66533E-04	2,68659E-04	1,07366E+00	1,95680E+00
160	3,12500E-03	2,26763E-04	3,66244E-05	1,04079E+00	4,98956E+00
320	1,56250E-03	1,11919E-04	1,75205E-06	1,01873E+00	5,82297E+00
640	7,81250E-04	5,56180E-05	2,41130E-08	1,00883E+00	5,79433E+00
1280	3,90625E-04	2,77267E-05	2,02918E-10	1,00428E+00	5,46196E+00
2560	1,95312E-04	1,38432E-05	3,17417E-12	1,00210E+00	6,77193E+00
5120	9,76562E-05	6,91658E-06	2,12733E-14	1,00104E+00	8,35421E+00
10240	4,88281E-05	3,45705E-06	1,03220E-16	1,00052E+00	7,57459E+00

FONTE: O autor (2019).

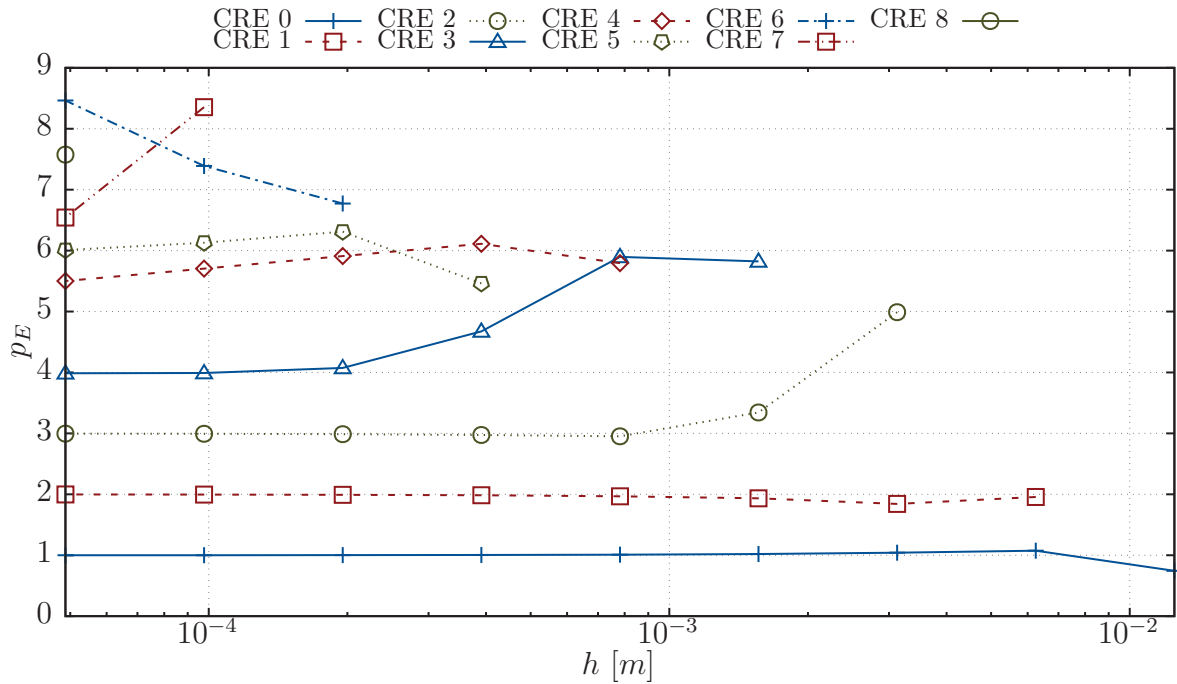
FIGURA 30 – COMPORTAMENTO DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FV.

FONTE: O autor (2019).

com FD na FIGURA 32. Os comportamentos da norma  $L^1$  e de sua ordem são apresentados na TABELA 11 e nas FIGURAS 33 e 34 para a massa específica.

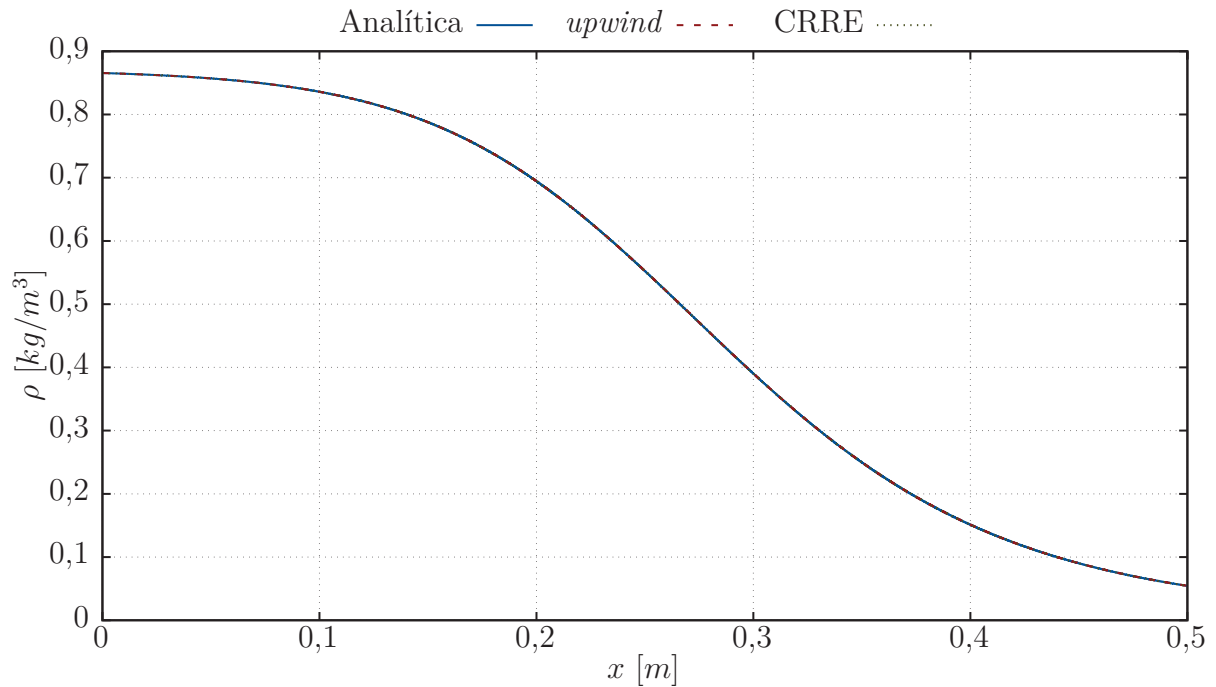
Observa-se que a distribuição da massa específica no bocal convergente-divergente e grande concordância entre as soluções analítica, numérica para o *upwind* e da CRRE para o FD na FIGURA 32. Uma importante característica dos métodos numérico em CFD é a conservação. Para verificar se a CRRE manteve a conservação da massa, foi usado o seguinte

$$\rho u A = \text{constante.} \quad (5.3)$$

FIGURA 31 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FV.

FONTE: O autor (2019).

FIGURA 32 – RESULTADO DA MASSA ESPECÍFICA PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD NA MALHA DE 10240 NÓS.



FONTE: O autor (2019).

Dessa forma, é possível verificar se a massa é conservada. Usando a norma  $L^1$

média

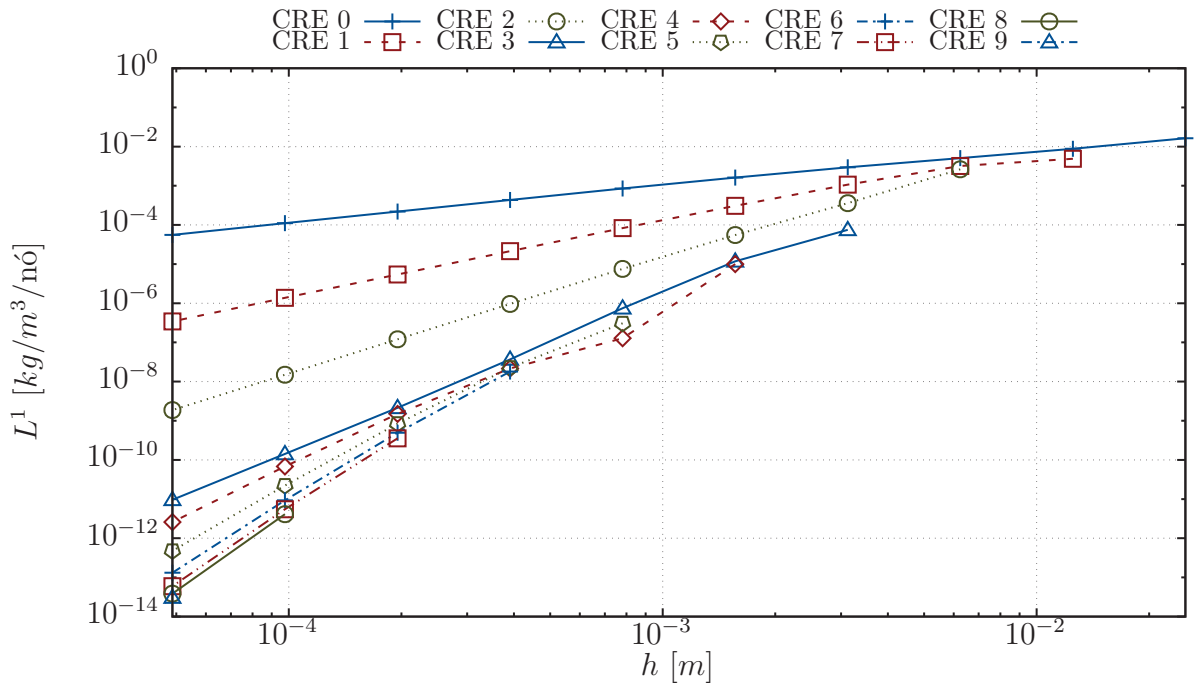
$$L_m^1 = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^N |\rho(i)u(i)A(i) - \rho(i-1)u(i-1)A(i-1)|. \quad (5.4)$$

TABELA 11 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD.

N	$h$ [m]	Norma $L^1$ [ $kg/m^3/nó$ ]		Ordem	
		<i>upwind</i>	CRRE	<i>upwind</i>	CRRE
20	2,50000E-02	1,62959E-02	-	-	-
40	1,25000E-02	8,79188E-03	4,87100E-03	8,90267E-01	-
80	6,25000E-03	5,07196E-03	2,63485E-03	7,93627E-01	6,08996E-01
160	3,12500E-03	2,95264E-03	7,49291E-05	7,80539E-01	2,87370E+00
320	1,56250E-03	1,61668E-03	9,97853E-06	8,68969E-01	2,67112E+00
640	7,81250E-04	8,48068E-04	3,08779E-07	9,30784E-01	6,28378E+00
1280	3,90625E-04	4,34536E-04	1,80436E-08	9,64706E-01	3,77323E+00
2560	1,95312E-04	2,19963E-04	3,56336E-10	9,82211E-01	5,18964E+00
5120	9,76562E-05	1,10664E-04	4,10207E-12	9,91074E-01	6,02350E+00
10240	4,88281E-05	5,55038E-05	3,06788E-14	9,95530E-01	6,73102E+00

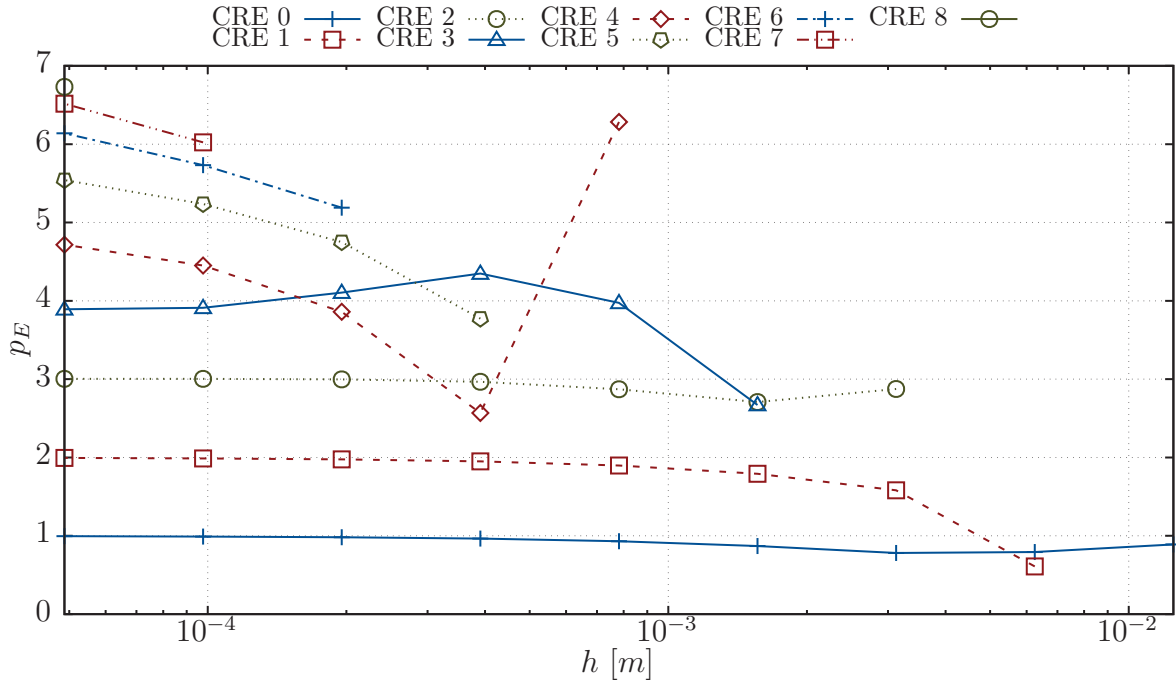
FONTE: O autor (2019).

FIGURA 33 – COMPORTAMENTO DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD.



FONTE: O autor (2019).

Para a solução *upwind* e  $g = 10$   $L_m^1 = 2,75E - 07$  [ $kg/s/nó$ ], para a CRRE,  $g = 10$  e  $m = 9$   $L_m^1 = 1,16E - 16$  [ $kg/s/nó$ ] e para a solução analítica nos pontos da malha  $g = 10$   $L_m^1 = 4,76E - 33$  [ $kg/s/nó$ ]. Observa-se que o valor obtido para a solução *upwind* está longe do erro de máquina ( $\approx 1E - 32$ ) e isto ocorre devido à magnitude do erro e das variáveis da solução. Além disso, observa-se que a magnitude de  $L_m^1$  reduziu significativamente para a solução da CRRE, o que indica que o procedimento não prejudica

FIGURA 34 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO Q1D ISENTRÓPICO E FD.

Fonte: O autor (2019).

a conservação, inclusive, a melhora. Para efeito de comparação, também foi apresentado o cálculo para a solução analítica, que ficou próximo do erro de máquina conforme esperado.

Na verificação da CRRE é possível observar que, apesar de não haver aumento de erro, algumas ordens efetivas não apresentaram o comportamento esperado desde a primeira malha disponível para CRE. Ainda assim, CRRE conseguiu reduzir o erro por um fator de  $1,89E+09$  e aumentar a ordem de acurácia de 0,96 para 6,73, na malha mais fina. A causa do comportamento não monótono de algumas ordens não foi investigada com um grande nível de detalhes, ela pode estar relacionada, por exemplo, à aplicação das condições de contorno e à ordem do polinômio usado para tal.

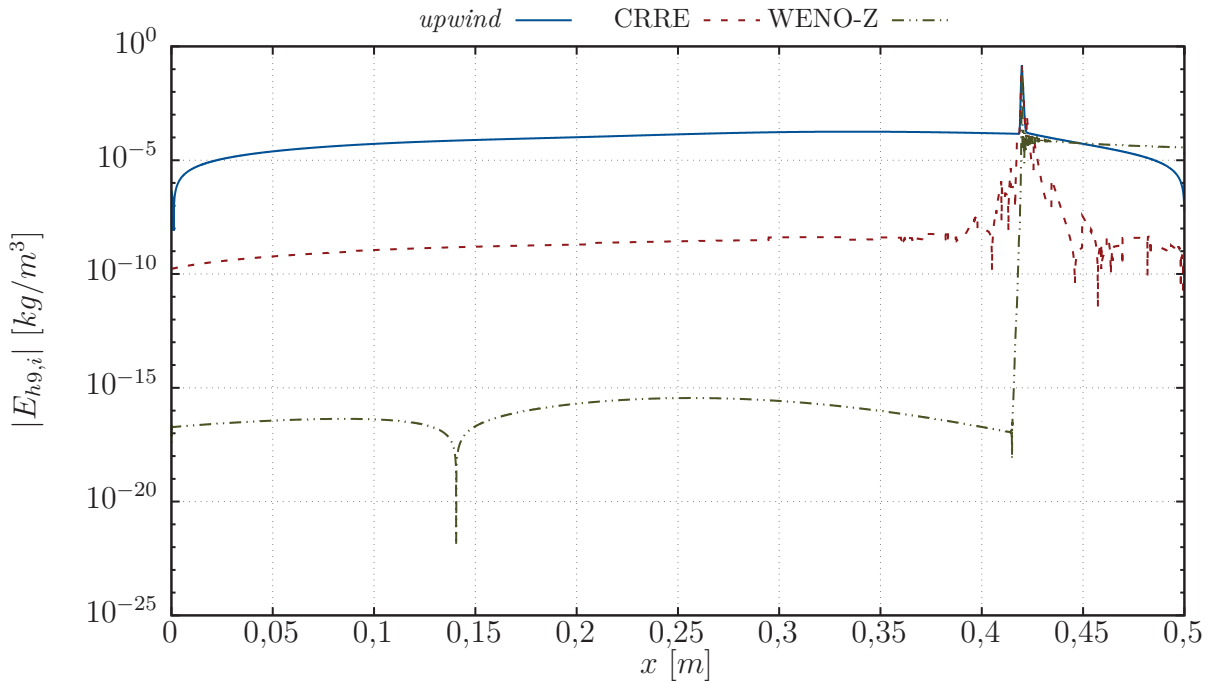
#### 5.4 Escoamento adiabático com choque normal

Para o escoamento com onda de choque normal, não é interessante utilizar a equação (3.69) para calcular a norma  $L^1$ , pois o comportamento do erro é não monótono na região do choque. Ainda, a região à jusante do choque está sujeita à degradação da ordem de acurácia (59). Isto não acontece com a região à montante do choque por causa do tipo de escoamento, i.e., o escoamento é supersônico e a informação não consegue se propagar à montante do choque. Portanto, a norma  $L^1$  foi calculada em regiões suaves da solução, identificadas pelo mesmo procedimento apresentado para a CRRE.

Primeiro, é apresentado o erro em todos os nós e o campo de soluções para

a malha com 5120 nós nas FIGURAS 35 e 36. Onde observa-se que a transição pelo choque é menos suave na aproximação WENO-Z do que na *upwind* e na CRRE, e que a acurácia da WENO-Z é reduzida à jusante do choque. Também, apesar de erros com maiores magnitudes, a CRRE reduz os erros à montante e à jusante do choque. A perda de acurácia da WENO-Z é um comportamento comum entre as aproximações de alta ordem (59). Ainda, a transição suave apresentada pela CRRE ocorre em razão desta última não conseguir melhorar a transição suave das soluções calculadas com a aproximação *upwind*.

FIGURA 35 – ERRO NUMÉRICO EM CADA NÓ DO CAMPO DE SOLUÇÕES PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE.

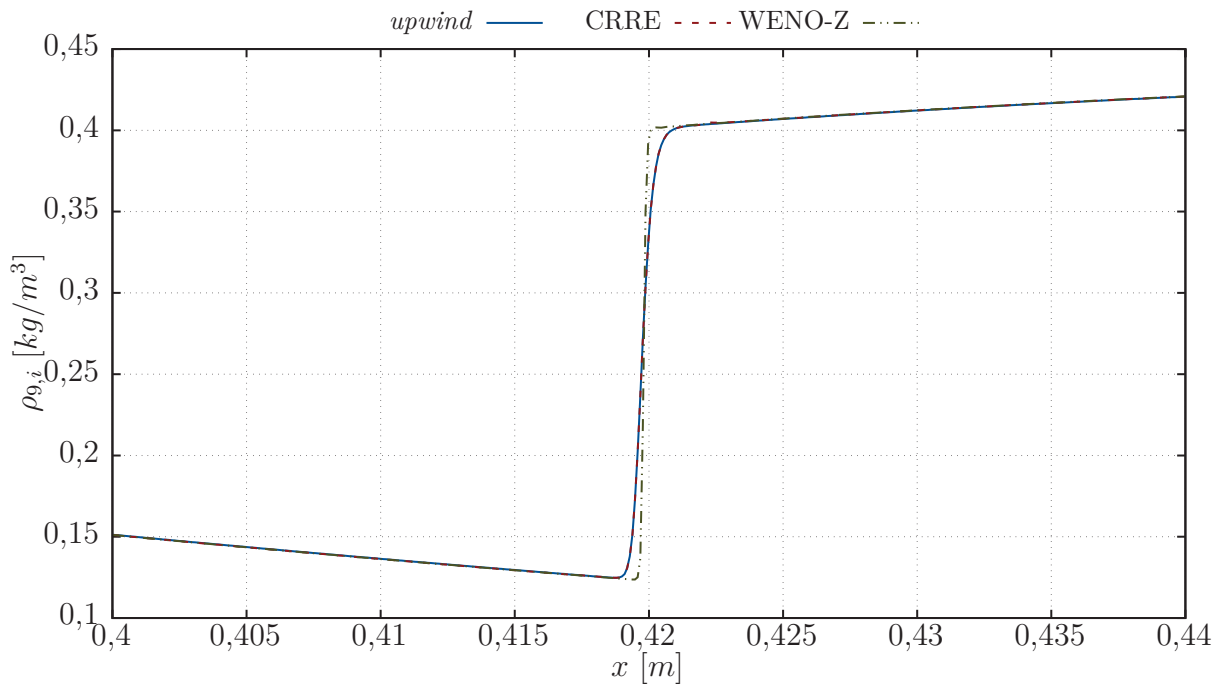


FONTE: O autor (2019).

A norma  $L^1$  e sua ordem para o escoamento Q1D com onda de choque são apresentadas na TABELA 12, onde “tempo acumulado de CPU” representa o tempo necessário para calcular a solução em todas as malhas envolvidas no procedimento da CRRE. O tempo de pós-processamento da CRRE foi insignificante em todos os cálculos, quando comparado com o tempo para obter as soluções em cada nível de malha. Nesta análise, o limite de ordem e de erro apresentado pela WENO-Z é resultante da perda de acurácia à jusante do choque.

É importante destacar que o tempo de CPU necessário para obter os resultados com a CRRE foi menor do que a aproximação WENO-Z em todas as malhas. A CRRE conseguiu atingir a magnitude do erro da WENO-Z nas últimas duas malhas. Era esperado um maior aumento de ordem ou maior redução de erro para a CRRE, se comparado com o desempenho do procedimento usado em soluções suaves e se levado em consideração a quantidade de níveis disponíveis para a CRRE.

FIGURA 36 – CAMPO DE SOLUÇÕES PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE.



FONTE: O autor (2019).

TABELA 12 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE NA REGIÃO SUAVE.

N	WENO-Z			CRRE		
	$L^1^*$ [kg/m <sup>3</sup> /nó]	Ordem	Tempo de CPU	$L^1^*$ [kg/m <sup>3</sup> /nó]	Ordem	“Tempo acumulado de CPU”
20	$9,12E-03$	-	5,51 s	-	-	-
40	$9,35E-04$	3,29	16,0 s	$2,32E-02$	-	9,40 s
80	$1,33E-03$	-0,51	45,8 s	$6,74E-03$	1,71	36,4 s
160	$5,82E-05$	4,51	2,64 min	$1,35E-03$	2,11	1,93 min
320	$1,42E-05$	2,03	9,26 min	$2,03E-04$	2,72	6,44 min
640	$1,36E-07$	6,70	31,5 min	$2,83E-05$	2,84	26,9 min
1280	$1,93E-07$	-0,5	2,01 h	$1,20E-06$	4,55	1,64 h
2560	$1,87E-07$	0,04	8,72 h	$1,18E-07$	3,35	6,20 h
5120	$6,33E-08$	1,56	32,0 h	$4,72E-09$	4,64	24,6 h

FONTE: O autor (2019).

NOTA: \* Calculada na região suave da solução, determinada pelo procedimento da Seção 4.1.

Com o intuito de comparar a CRRE e a WENO-Z apenas à montante do choque, a norma  $L^1$  e sua ordem são apresentadas na TABELA 13, onde é possível observar que a WENO-Z possui uma menor magnitude do erro. Por causa do choque, não é possível concluir sobre o comportamento da ordem. Entretanto, em ambos os casos o erro está sendo reduzido conforme a malha é refinada.

Se a CRRE for comparada com a WENO-Z na região à montante do choque, as magnitudes de erro desta última são menores. Porém, devido à quantidade de malhas (e níveis de CRE) disponíveis, é possível aumentar o desempenho da CRRE. Antes de propor

TABELA 13 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE À MONTANTE DO CHOQUE.

N	WENO-Z		CRRE	
	$L^1^*$ [kg/m <sup>3</sup> /nó]	Ordem	$L^1^*$ [kg/m <sup>3</sup> /nó]	Ordem
20	9,12E-03	-	-	-
40	9,35E-04	3,29	1,89E-02	-
80	1,33E-03	-0,51	7,42E-03	1,27
160	4,44E-04	1,58	1,30E-03	2,26
320	1,01E-04	2,14	1,69E-04	2,92
640	3,59E-05	1,49	2,18E-05	2,95
1280	6,54E-08	9,10	6,32E-07	5,10
2560	1,40E-10	8,86	8,96E-08	2,82
5120	1,31E-12	6,74	4,90E-09	4,19

FONTE: O autor (2019).

NOTA: \* Calculada à montante do choque.

procedimentos e estratégias para melhorar o desempenho da CRRE em problemas com fluidos compressíveis, é interessante tratar de problemas mais simples, como por exemplo a EAL. Esta última proporciona um modelo simples e permite soluções com descontinuidade.

### 5.5 Equações de Euler bidimensionais

Para o escoamento 2D, primeiro serão apresentados os resultados do escoamento externo e, na sequência, os resultados do escoamento simplificado. Para o primeiro, os comportamentos das normas  $L^1$  e suas ordens são apresentados na TABELA 14 e nas FIGURAS 37 e 38 para a massa específica.

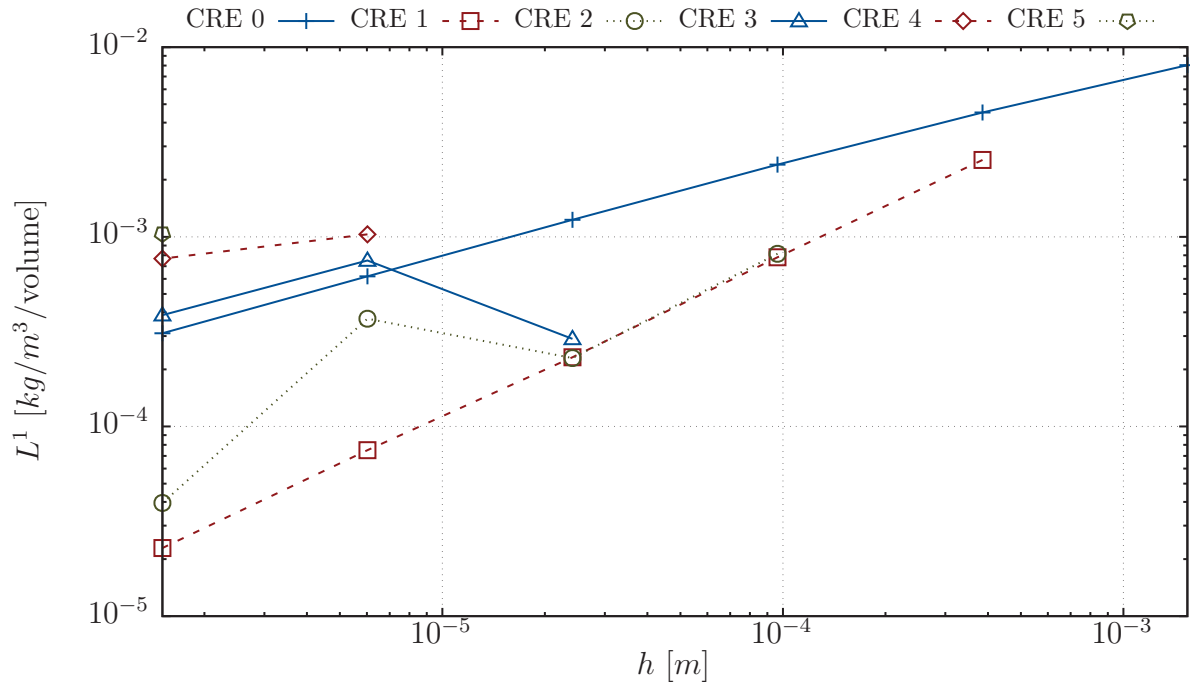
TABELA 14 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO 2D EXTERNO E FV.

N	$h$ [m]	Norma $L^1$ [kg/m <sup>3</sup> /volume]		Ordem	
		Sem CRRE	Com CRRE	Sem CRRE	Com CRRE
200	1,54133E-03	8,03418E-03	-	-	-
800	3,85482E-04	4,52806E-03	2,54483E-03	8,27256E-01	-
3200	9,63798E-05	2,40464E-03	8,13371E-04	9,13074E-01	1,70592E+00
12800	2,40955E-05	1,22992E-03	2,89869E-04	9,67261E-01	1,82451E+00
51200	6,02392E-06	6,19428E-04	1,03113E-03	9,89550E-01	-1,37191E+00
204800	1,50598E-06	3,10186E-04	1,03647E-03	9,97804E-01	4,26293E-01
819200	3,76495E-07	1,55047E-04	2,12940E-04	1,00042E+00	2,67791E+00
3276800	9,41239E-08	7,74446E-05	8,38710E-05	1,00147E+00	1,42406E+00

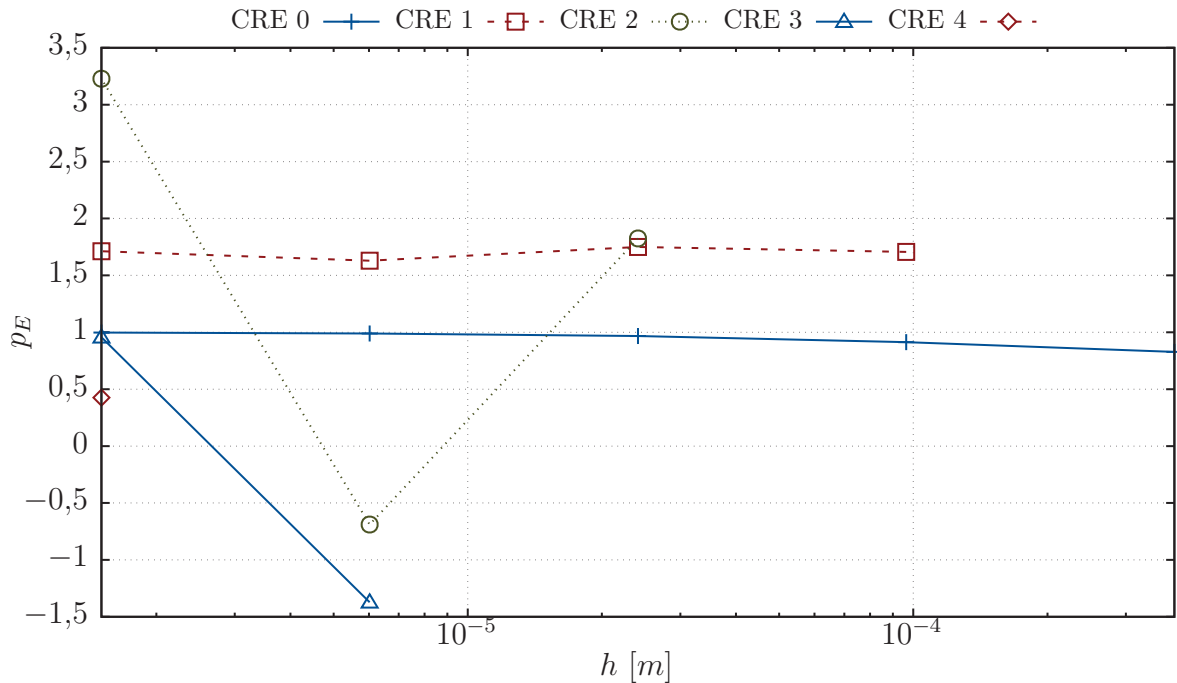
FONTE: O autor (2019).

Observa-se nos resultados para o escoamento externo que uma aplicação de CRE foi efetiva e conseguiu aumentar a ordem de acurácia da solução. Porém, no segundo nível de CRE foi observado aumento do erro numérico e um comportamento oscilatório da ordem efetiva. O problema do escoamento externo foi resolvido, por exemplo, em conjunto



FIGURA 37 – COMPORTAMENTO DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO 2D EXTERNO E FV.

FONTE: O autor (2019).

FIGURA 38 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO 2D EXTERNO E FV.

FONTE: O autor (2019).

com conceitos de transformação de coordenadas e o método das soluções fabricadas. Outros fatores, como a não uniformidade da malha física ou componentes de erro inseridas pelo processo de transformação de coordenadas, podem ser a causa do comportamento

observado para a CRRE.

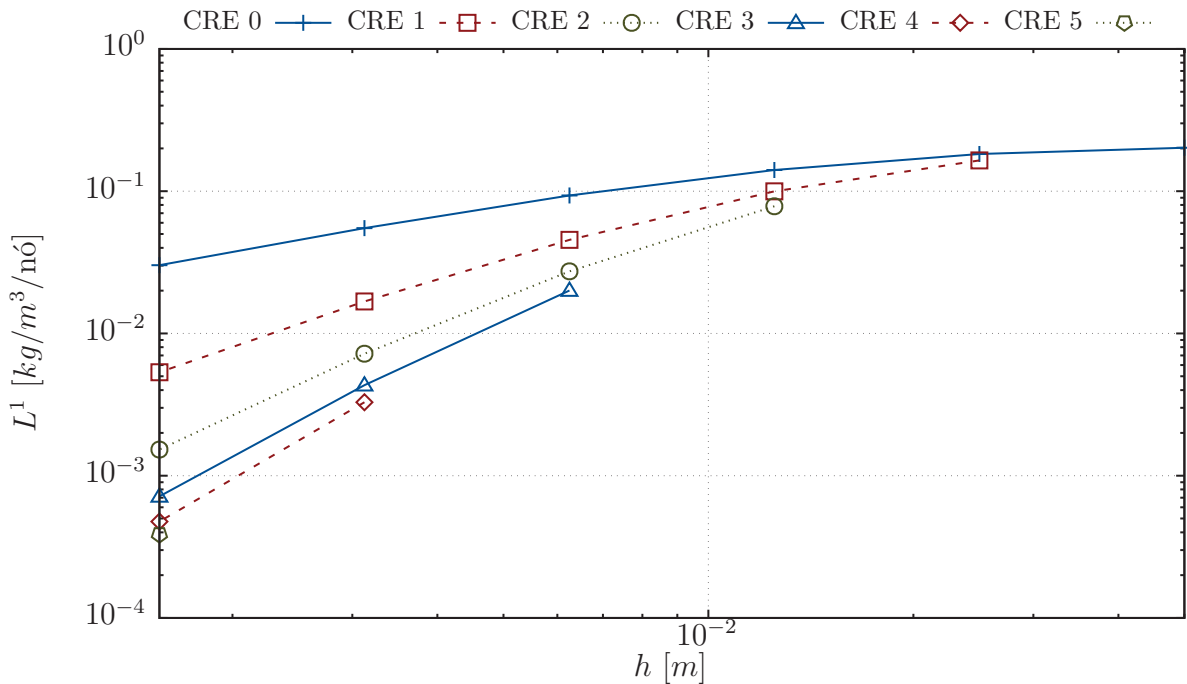
Com o intuito de limitar as suspeitas envolvidas no procedimento da CRRE bidimensional, foi resolvido o escoamento simplificado das equações de Euler com  $u$ ,  $v$  e  $p$  constantes. Para este último, os comportamentos das normas  $L^1$  e suas ordens são apresentados nas TABELAS 15 e nas FIGURAS 39 e 40 para a massa específica.

TABELA 15 – RESULTADOS DA NORMA  $L^1$  E DE SUA ORDEM PARA O ESCOAMENTO 2D SIMPLIFICADO E FD.

N	h	Norma $L^1$		Ordem	
		<i>upwind</i>	CRRE	<i>upwind</i>	CRRE
400	5,00000E-02	2,01902E-01	-	-	-
1600	2,50000E-02	1,82559E-01	1,64457E-01	1,45297E-01	-
6400	1,25000E-02	1,41080E-01	7,84436E-02	3,71843E-01	7,19392E-01
25600	6,25000E-03	9,32469E-02	2,00464E-02	5,97389E-01	1,52053E+00
102400	3,12500E-03	5,50040E-02	3,28457E-03	7,61518E-01	2,21048E+00
409600	1,56250E-03	3,01701E-02	3,85346E-04	8,66417E-01	2,78768E+00
1638400	7,81250E-04	1,58534E-02	3,08597E-05	9,28324E-01	3,40801E+00
6553600	3,90625E-04	8,13445E-03	2,32610E-06	9,62680E-01	3,62002E+00

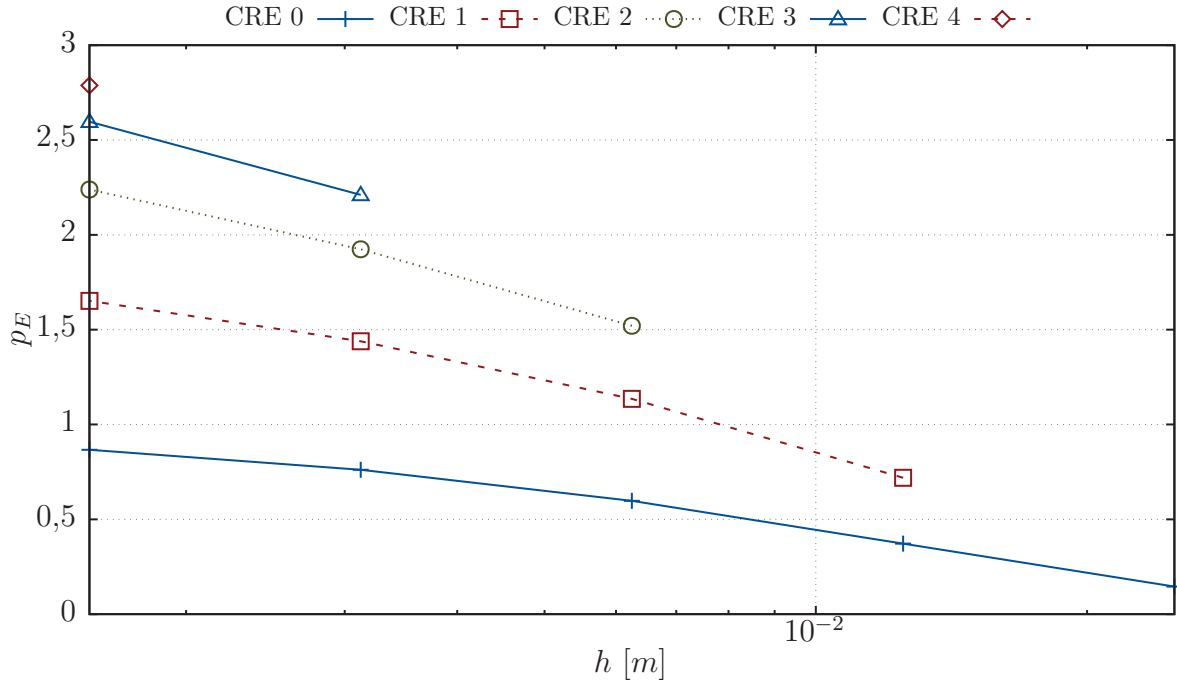
FONTE: O autor (2019).

FIGURA 39 – COMPORTAMENTO DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO 2D SIMPLIFICADO E FD.



FONTE: O autor (2019).

Neste último problema, pode-se observar um ótimo desempenho da CRRE com redução de erro por um fator de  $3,80E+03$  e aumento de ordem de 0,963 para 3,62 na última malha. Apesar de simplificado, este problema foi resolvido em regime transiente e utiliza as mesmas ferramentas numéricas do que um escoamento interno em bocal convergente-divergente ou escoamento externo em perfis. Ainda, com os resultados para

FIGURA 40 – COMPORTAMENTO DA ORDEM EFETIVA DA NORMA  $L^1$  PARA O ESCOAMENTO 2D SIMPLIFICADO E FD.

FONTE: O autor (2019).

este problema, conclui-se que a regressão polinomial múltipla pode ser usada em conjunto com CRRE e que o procedimento da CRRE bidimensional possibilita a redução de erros ou aumento de ordem.

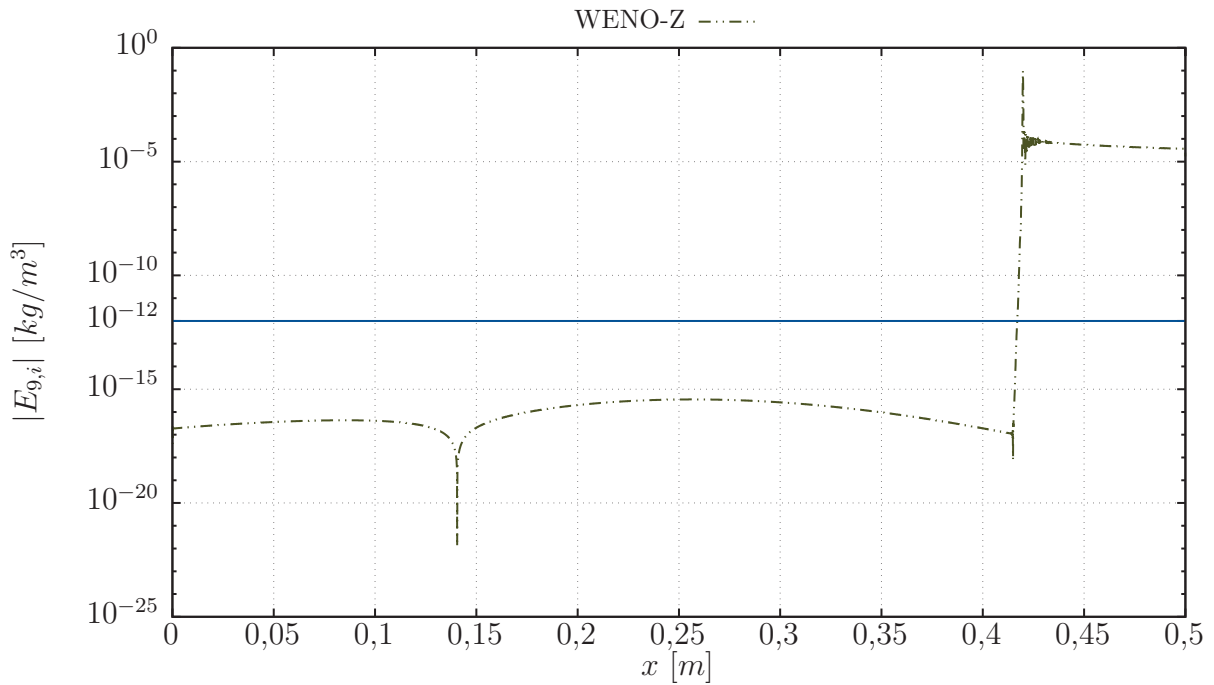
## 5.6 Consolidação dos resultados

Considerando os modelos físicos e matemáticos para a solução de escoamentos no interior de motores-foguete ou ao redor de perfis aerodinâmicos, os métodos numéricos e as discretizações envolvidas na solução dos mesmos, buscou-se, por um procedimento de pós-processamento capaz de reduzir significativamente os erros numéricos ou aumentar a ordem de acurácia das soluções numéricas de tais modelos. Ao invés de utilizar o procedimento original da CRE, foi demonstrado que esta causa um limite no aumento da ordem de acurácia quando usada repetidamente. Então, foi proposta a CRRE para malhas sem nós (ou volumes) coincidentes.

Ficou evidente que a CRRE funciona em soluções de escoamentos com fluidos compressíveis, e tipos de malhas mais genéricos, do que aqueles geralmente utilizados com a CRE original, e que a CRRE funciona com diferentes formas de discretização, e.g., FD explícito e FV explícito e implícito e, também, em situações onde a solução é uma média no volume. Entretanto, nesta última situação é necessário modificar o procedimento para tratar a solução como uma média no volume.

Apesar de possuir um desempenho satisfatório em soluções com onda de choque, é possível melhorar o desempenho da CRRE. Isto se verifica por causa da quantidade de níveis disponíveis e do desempenho da CRRE em soluções suaves. Um fator que pode estar limitando o desempenho da CRRE é a detecção da região suave. Observa-se na FIGURA 41 que a magnitude do erro da aproximação WENO-Z fica um pouco abaixo de  $1E - 15$  à montante do choque para a malha mais fina. Porém, a norma  $L^1$  apresentada na TABELA 12 tem valor  $1,31E - 12$ . Como o procedimento usado para detectar a região suave foi o mesmo do que para a CRRE, acredita-se que este possa estar subestimando o comprimento da região não suave. No caso da transição suave, isto poderia ser melhorado com o uso de partições de fluxos menos dissipativas como a partição de fluxo de Godunov.

FIGURA 41 – ERRO NUMÉRICO EM CADA NÓ DO CAMPO DE SOLUÇÕES PARA O ESCOAMENTO Q1D COM CHOQUE E APROXIMAÇÃO WENO-Z.



FONTE: O autor (2019).

O procedimento apresentou algumas limitações em casos específicos, por exemplo, em decorrência da aplicação de condições de contorno com ordens de aproximações baixas, do uso de aproximações numéricas com ordens elevadas e do seu uso em um problema bidimensional. No primeiro caso, suspeita-se que as aproximações de ordens baixas estejam modificando as componentes da solução numérica de ordens mais baixas e isto, por sua vez, prejudica o desempenho da CRRE; apesar de não ser observado no escoamento de Rayleigh e contorno esquerdo. Outra suspeita seria que as condições de contorno não estão sendo aplicadas de maneira correta. De qualquer forma, uma análise mais detalhada é necessária.

No segundo caso, suspeita-se que a diferença entre as ordens espacial e temporal

possa estar causando uma limitação de ordem na CRRE. Em testes preliminares da EAL, verificou-se que uma aproximação de estêncil fixo de ordem três permitia uma grande redução de erro e um grande aumento da ordem de acurácia. Porém, uma aproximação de estêncil fixo de ordem quatro permitia apenas um nível de aumento da ordem, com um comportamento qualitativamente semelhante à aproximação WENO-Z. Por se tratar de um problema transiente, não é possível concluir apenas sobre a ordem espacial, sendo necessárias análises mais detalhadas.

Por fim, no último caso suspeita-se da não uniformidade da malha e do procedimento de transformação de coordenadas. A não uniformidade da malha, se não levada em consideração pelas aproximações numéricas, pode causar redução da ordem das mesmas. No problema apresentado, a aproximação foi feita considerando-se a malha computacional, que é uniforme. Para transformar a malha física em uniforme, no domínio computacional, foi usada a transformação de coordenadas. Nesta última, também é necessário usar aproximações para derivadas, o que pode modificar as componentes do erro da solução numérica e, assim, prejudicar o desempenho da CRRE.

Destaca-se que a estimativa de erro de Richardson é equivalente à correção apresentada por Roache e Knupp (30) e que a mesma estimativa do erro pode ser facilmente obtida, uma vez que a extrapolação tenha sido calculada. Isto representa uma vantagem, pois a CRRE também poderia ser usada como ferramenta de verificação numérica. Ao longo do desenvolvimento dos códigos, usados para resolver os problemas discutidos, foram identificados vários erros numéricos decorrentes da programação ou do uso inadequado dos métodos citados. Após a geração das soluções numéricas, mesmo quando a solução parecia estar convergindo para a ordem esperada, o uso da CRRE revelou limite de ordem e baixo desempenho. Após os problemas serem corrigidos, a CRRE apresentou um bom desempenho. Deste modo, quando o desempenho da CRRE estiver limitado ou houver aumento de erro, pode significar que exista alguma inconsistência no código ou solução numérica.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 Conclusões

Foi apresentado um procedimento de pós processamento, chamado de CRRE, para a redução de erros numéricos, e aumento da ordem de acurácia, em soluções numéricas de problemas em CFD. Este procedimento proporciona redução significativa de erros numéricos e aumento significativo da ordem de acurácia de todo o campo de soluções. Ainda, o procedimento pode ser aplicado em problemas transientes, permanentes, simples ou mais elaborados, que é o caso de escoamentos com fluidos compressíveis. Destacam-se cinco problemas: (i) a EAL, onde foi possível reduzir o erro por um fator de  $2,82E + 24$  e aumentar a ordem de acurácia de 1 para 10,9; (ii) o escoamento de Rayleigh, onde foi possível reduzir o erro por um fator de  $9,32E + 08$  e aumentar a ordem de 0,998 para 6,62 com um ótimo desempenho da CRRE; (iii) a equação de Euler Q1D, escoamento isentrópico e resolvida por FV, onde foi possível reduzir o erro por um fator de  $3,35E + 10$  e aumentar a ordem de 1 para 7,57, apesar de haver aumento de erro em algumas situações; (iv) a equação de Euler Q1D e escoamento com onda de choque, onde foi possível reduzir o erro e aumentar a ordem em magnitude comparável a de aproximações numéricas de alta ordem e em menor tempo e; (v) a equação de Euler 2D e escoamento simplificado, onde foi possível reduzir o erro por um fator de  $3,80E + 03$  e aumentar a ordem de 0,963 para 3,62 com o uso de regressão polinomial.

### 6.2 Contribuições

Com base no exposto, este trabalho apresenta as seguintes contribuições:

- a. foi demonstrado que o procedimento original da CRE apresenta um limite de ordem quando usado repetidamente;
- b. foi desenvolvido um novo procedimento, chamado de CRRE, para aumentar a acurácia das soluções numéricas; e
- c. foi mostrado que a CRRE possui um bom desempenho
  - nos métodos de discretização por FD e FV;
  - em malhas sem nós ou volumes coincidentes;
  - em soluções de escoamentos com problemas transientes;
  - em soluções de escoamentos com fluido compressível; e
  - em soluções de escoamentos com ondas de choque.

### 6.3 Sugestões para trabalhos futuros

Com base neste trabalho é possível destacar as seguintes sugestões para trabalhos futuros com CRRE:

- a. estudar de maneira mais ampla os problemas transientes;
- b. estudar os choques ou descontinuidades com modelos mais simples;
- c. estudar outros tipos de malhas, como as não uniformes e não estruturadas;
- d. estudar com mais detalhes a aplicação das condições de contorno e seu efeito;
- e. verificar os efeitos do erro de interpolação sobre a CRRE;
- f. estudar a estimativa de erro de Richardson, proveniente da CRRE; e
- g. estudar outros problemas com fluidos compressíveis e viscosos.

## REFERÊNCIAS

- 1 MARCHI, C. H. *Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 18, 19, 50, 51, 52 e 57.
- 2 OBERKAMPF, W. L.; BARONE, M. F. Measures of agreement between computation and experiment: Validation metrics. *Journal of Computational Physics*, v. 217, n. 1, p. 5 – 36, 2006. ISSN 0021-9991. Uncertainty Quantification in Simulation Science. Citado na página 18.
- 3 ASME. *Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2009. ISBN 9780791832097. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 50.
- 4 FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. Berlin: Springer, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 19, 24, 45 e 46.
- 5 ARAKI, L. K. *Verificação de soluções numéricas de escoamentos reativos em motores-foguete*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007. Citado na página 19.
- 6 CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 19, 54 e 55.
- 7 ALVES, A. C. *Verificação de soluções numéricas da equação de Laplace 2D com malhas triangulares e múltiplas extrapolações de Richardson*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010. Citado na página 19.
- 8 NOVAK, L. A. *Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir o erro de discretização em condução de calor*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012. Citado na página 19.
- 9 MARTINS, M. A. *Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD*. Tese (Doutorado) — Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2013. Citado na página 19.
- 10 ANDERSON, J. D. *Modern Compressible Flow*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003. Citado 11 vezes nas páginas 19, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36 e 43.
- 11 SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. *Rocket Propulsion Elements*. 7. ed. New York: John Wiley & Sons, 2000. Citado na página 20.
- 12 ANDERSON, J. D.; HUGHES, W. *Fundamentals of Aerodynamics*. 5. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- 13 RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A*, v. 210, p. 307–357, 1910. Citado na página 21.



- 14 RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The deferred approach to the limit. part i. single lattice. part ii. interpenetrating lattices. *The Royal Society*, v. 226, p. 636–646, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- 15 DANG, A.; KEHTARNAVAZ, H.; COATS, D. The use of richardson extrapolation in pns solutions of rocket nozzle flow. In: *25th Joint Propulsion Conference*. Monterey, Califórnia: [s.n.], 1989. Citado na página 21.
- 16 CHANG, C.-C.; CHUNG, S.-L.; STAPLETON, R. C. Richardson extrapolation techniques for the pricing of american-style options. *Journal of Futures Markets*, v. 27, n. 8, p. 791–817, 2007. Citado na página 21.
- 17 TSENG, C.-C.; LEE, S.-L. Design of digital differentiator using difference formula and richardson extrapolation. *IET Signal Processing*, Institution of Engineering and Technology, v. 2, p. 177–188(11), June 2008. ISSN 1751-9675. Disponível em: [http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-spr\\_20070145](http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-spr_20070145). Citado na página 21.
- 18 BICKEL, P. J.; YAHAV, J. A. Richardson extrapolation and the bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, v. 83, n. 402, p. 387–393, 1988. Citado na página 21.
- 19 KAPS, P.; POON, S. W. H.; BUI, T. D. Rosenbrock methods for stiff odes: A comparison of richardson extrapolation and embedding technique. *Computing*, v. 34, n. 1, p. 17–40, 1985. ISSN 1436-5057. Citado na página 21.
- 20 HAN, G.; WANG, R. Richardson extrapolation of iterated discrete galerkin solution for two-dimensional fredholm integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 139, n. 1, p. 49–63, 2002. Citado na página 21.
- 21 FRANKE, J.; FRANK, W. Application of generalized richardson extrapolation to the computation of the flow across an asymmetric street intersection. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 96, n. 10–11, p. 1616 – 1628, 2008. ISSN 0167-6105. 4th International Symposium on Computational Wind Engineering (CWE2006). Citado na página 21.
- 22 ZINGG, D. Viscous airfoil computations using richardson extrapolation. In: *10th Computational Fluid Dynamics Conference*. [S.l.: s.n.], 1991. Citado na página 21.
- 23 SHYY, W. et al. Evaluation of richardson extrapolation in computational fluid dynamics. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, v. 41, n. 2, p. 139–164, 2002. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/104077902317240058>. Citado na página 22.
- 24 WANG, Y.; ZHANG, J. Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2d poisson equation. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 1, p. 137 – 146, 2009. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108004580>. Citado na página 22.
- 25 NICOLAS, X. et al. Benchmark solution for a three-dimensional mixed-convection flow, part 2: Analysis of richardson extrapolation in the presence of a singularity. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, v. 60, n. 5, p. 346–369, 2011. Disponível

- em: <<http://dx.doi.org/10.1080/10407790.2011.616761>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- 26 MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Effect of ten cfd numerical schemes on repeated richardson extrapolation (rre). *Journal of Applied & Computational Mathematics*, OMICS International., v. 2, n. 2, p. 1–9, 2013. ISSN 2168-9679. Citado na página 22.
- 27 MARCHI, C. H. et al. Highly accurate numerical solutions with repeated richardson extrapolation for 2d laplace equation. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, n. 12–13, p. 7386 – 7397, 2013. ISSN 0307-904X. Disponível em: <[//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X13001509](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X13001509)>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.
- 28 ABDELMIGID, T. A. et al. Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using gpu accelerated code. *Alexandria Engineering Journal*, p. –, 2016. ISSN 1110-0168. Disponível em: <[//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1110016816302800](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1110016816302800)>. Citado na página 23.
- 29 FORD, W. F.; SIDI, A. An algorithm for a generalization of the richardson extrapolation process. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 24, n. 5, p. 1212–1232, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0724080>>. Citado na página 23.
- 30 ROACHE, P. J.; KNUPP, P. M. Completed richardson extrapolation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 9, p. 365–374, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 23, 52 e 87.
- 31 RICHARDS, S. A. Completed richardson extrapolation in space and time. *Communications In Numerical Methods In Engineering*, v. 13, p. 573–582, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 73.
- 32 SIDI, A. A complete convergence and stability theory for a generalized richardson extrapolation process. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 34, n. 5, p. 1761–1778, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/S0036142994278589>>. Citado na página 23.
- 33 MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. da. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. *Numerical Heat Transfer*, v. 42, p. 167–188, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 50.
- 34 CELIK, I. et al. Limitations of richardson extrapolation and some possible remedies. *Journal of Fluids Engineering*, v. 127, n. 4, p. 795–805, 2005. Citado na página 23.
- 35 ASADZADEH, M.; SCHATZ, A. H.; WENDLAND, W. A new approach to richardson extrapolation in the finite element method for second order elliptic problems. *Mathemactics of Computation*, v. 78, n. 268, p. 1951–1973, 2009. Citado na página 23.
- 36 MARCHI, C. H. et al. Polynomial interpolation with repeated richardson extrapolation to reduce discretization error in {CFD}. *Applied Mathematical Modelling*, v. 40, n. 21–22, p. 8872 – 8885, 2016. ISSN 0307-904X. Disponível em: <[//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X16302797](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X16302797)>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

- 37 MARCHI, C.; GIACOMINI, F. F.; SANTIAGO, C. D. Repeated richardson extrapolation to reduce the field discretization error in computational fluid dynamics. *Numerical Heat Transfer, part B*, v. 70, n. 4, p. 340–353, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- 38 LOMAX, H.; PULLIAM, T. H.; ZINGG, D. W. *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 45.
- 39 SHU, C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In: \_\_\_\_\_. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Cetraro, Italy, June 23–28, 1997*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998. p. 325–432. ISBN 978-3-540-49804-9. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BFb0096355>>. Citado 7 vezes nas páginas 24, 38, 39, 40, 41, 42 e 60.
- 40 VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. 2. ed. Harlow: Pearson, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 24, 43 e 46.
- 41 HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows*. 2. ed. [S.l.]: Elsevier, 2007. ISBN 978-0-7506-6594-0. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 43.
- 42 JOHN, J. E.; KEITH, T. G. *Gas Dynamics*. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 29.
- 43 LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. 1. ed. New York: Cambridge texts in applied mathematics, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- 44 TORO, E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. 3. ed. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN 9783540498346. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=SqEjX0um8o0C>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 37.
- 45 BORGES, R. B. R. *Comunicação pessoal*. 2016. Citado na página 31.
- 46 JIANG, G.-S.; SHU, C.-W. Efficient implementation of weighted {ENO} schemes. *Journal of Computational Physics*, v. 126, n. 1, p. 202 – 228, 1996. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999196901308>>. Citado na página 36.
- 47 BERTOLDO, G. *Otimização aerodinâmica de newton com base nas equações de navier-stokes*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 36, 67 e 68.
- 48 BORGES, R. et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 3191–3211, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 39, 52 e 58.
- 49 BERTOLDO, G. *Comunicação pessoal*. 2016. Citado na página 43.
- 50 van Doormaal, J. P. *Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows*. Tese (Doutorado) — University of Waterloo, December 1985. Citado na página 44.

- 51 MARCHI, C. H.; MALISKA, C. R. A nonorthogonal finite volume method for the solution of all speed flows using co-located variables. *Numerical Heat Transfer*, v. 26, n. Part B, p. 293–311, 1994. Citado na página 44.
- 52 MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 44, 46 e 47.
- 53 MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. *Relatório Técnico 5: código Mach2D 5.0*. 2007. Departamento de Mecânica da Universidade Federal do Paraná. Citado na página 45.
- 54 SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. *Numerical Heat Transfer*, v. 4, p. 1–19, 1981. Citado na página 46.
- 55 TAN, S.; SHU, C.-W. Inverse lax-wendroff procedure for numerical boundary conditions of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, v. 229, p. 8144–8166, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 46, 47, 48, 49 e 66.
- 56 TAN, S. et al. Efficient implementation of high order inverse lax-wendroff boundary treatment for conservation laws. *Journal of Computational Physics*, v. 231, p. 2510–2527, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 46, 48 e 49.
- 57 ROACHE, P. *Fundamentals of verification and validation*. New Mexico: Hermosa, 2009. ISBN 9780913478127. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=uGdjygAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 52.
- 58 BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H. Verification and validation of the foredrag coefficient for supersonic and hypersonic flow of air over a cone of fineness ratio 3. *Applied Mathematical Modelling*, v. 44, p. 409 – 424, 2017. ISSN 0307-904X. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 68.
- 59 GOTTLIEB, S.; GOTTLIEB, D.; SHU, C.-W. Recovering high-order accuracy in weno computations of steady-state hyperbolic systems. *Journal of Scientific Computing*, v. 28, n. 2, p. 307–318, Sep 2006. ISSN 1573-7691. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10915-006-9078-8>>. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 80.